

Über die Modelle

der

hyperbolischen Geometrie

Über die Modelle

der

hyperbolischen Geometrie

Wissenschaftliche Arbeit

am

Institut für Reine Mathematik

Universität Heidelberg

Vorgelegt im August 1996 von

Carsten Augat

Gutachter: Prof. Dr. Werner End

Inhaltsverzeichnis

§ 0 Einleitung.	5
§ 1 Grundlagen.	7
1.1 Die Hyperbelfunktionen.	7
1.2 Die Area-Funktionen.	8
1.3 Rechenregeln für die Hyperbelfunktionen.	9
1.4 Kurzer Blick auf die komplexen Zahlen.	10
1.5 Kreis-, Sphären-, Ebenengleichung; sphärische Geometrie.	10
1.6 Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung.	11
1.7 Notation.	11
§ 2 Das H^+-Modell der hyperbolischen Geometrie.	12
2.1 Die Metrik auf dem Hyperboloid.	13
2.2 Die hyperbolischen Geraden.	17
2.3 Der hyperbolische Abstand als Fläche.	18
2.4 Die Isometrien auf dem Hyperboloid.	24
2.5 Hyperbolische Trigonometrie.	28
§ 3 Das Poincaré'sche Einheitskreismodell E.	34
3.1 Die Metrik in E	35
3.2 Die Geraden in E	36
3.3 Die Isometrien von E	39
3.4 Der hyperbolische Abstand zweier Punkte in E	48
§ 4 Das Poincaré'sche Halbebenenmodell H^2.	51
4.1 Die hyperbolischen Geraden.	52
4.2 Die Metrik in H^2	56
4.3 Die Isometrien.	58
4.4 Der hyperbolische Abstand.	63
§ 5 Geometrische Betrachtungen und Konstruktionen.	68
5.1 Die Gerade durch zwei gegebene Punkte.	68
5.2 Die Mittelsenkrechte zweier Punkte.	71
5.3 Der Seitencosinussatz aus den ebenen Modellen der hyp. Geometrie.	74
5.4 Der Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreiecks.	76
§ 6 Das Hemisphärenmodell.	78
6.1 Die hyperbolischen Geraden im Hemisphärenmodell.	79
6.2 Die Metrik.	81
6.3 Die Isometrien im Hemisphärenmodell.	83
6.4 Der hyperbolische Abstand.	89
§ 7 Das Klein'sche Modell E.	92
7.1 Die hyperbolischen Geraden im Klein'schen Modell.	92
7.2 Die Metrik.	92
7.3 Die kanonische Projektion $H^+ \rightarrow E$	94
7.4 Die Isometrien im Klein'schen Modell.	96
7.5 Der Abstand zweier Punkte im Klein'schen Modell.	100
§ 8 Zusammenfassung.	103
8.1 Die Modelle; Geraden, Metriken, Abstandsfunktionen, Isometrien.	103
8.2 Kanonische Projektionen zwischen den Modellen.	106
Literaturverzeichnis.	107
Erklärung.	108

§ 0 Einleitung

Um ca. 300 v. Chr. hat *Euklid* das gesamte mathematische Wissen damaliger Zeit in den sogenannten „Elementen“ zusammengefaßt. Darin nahm die von ihm entwickelte ebene Geometrie einen großen Raum ein.

Euklid hatte das Ziel, ein Axiomensystem aufzubauen, aus dem sämtliche Aussagen und Sätze der ebenen Geometrie folgen sollten. Und er schaffte es, ein System zu entwickeln, das zwar im Nachhinein einige Mängel aufwies, aber dennoch bis in die heutige Zeit Bedeutung hat; noch heute spricht man von der „euklidischen Geometrie“.

In diesem System findet man Axiome wie z.B. „Zu je zwei Punkten existiert genau eine Gerade durch diese beiden Punkte“ oder „Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen“. Und unter diesen Axiomen war eines, das die mathematische Welt noch zwei Jahrtausende lang beschäftigen sollte, nämlich das Parallelenaxiom. Euklid verfaßte es in seinen Elementen folgendermaßen:

„Und wenn eine Gerade zwei andere Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, sollen jene beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die kleiner als zwei Rechte sind.“

Die heutige, äquivalente Fassung lautet: „Zu einer gegebenen Geraden g und einem gegebenen Punkt P gibt es genau eine Gerade durch P , die zu g parallel ist“.

Das Parallelenaxiom wurde von Euklid gemieden, da er sich nie sicher war, ob es wirklich ein Axiom war, oder ob es sich als Folge aus den anderen Axiomen ergab. Diese Frage konnte er nicht beantworten, und sie sollte noch jahrhundertlang unbeantwortet bleiben.

Viele Mathematiker versuchten im Laufe der Jahrhunderte, die Abhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen zu zeigen. Sie entwickelten Geometrien, in denen alle Axiome außer das Parallelenaxiom gelten sollten und versuchten dann, zu zeigen, daß diese in sich widersprüchlich sind. Wenn jemand meinte, einen Beweis gefunden zu haben, mußte er hinterher jedoch immer erkennen, daß er Voraussetzungen benutzte, die nicht in den übrigen Axiomen verankert waren und sich als äquivalent zum Parallelenaxiom erwiesen.

Dies veranlaßte den Mathematiker *Carl Friedrich Gauß* (1777-1855) und auch andere zur Annahme, daß es doch Geometrien geben könnte, die alle Axiome Euklids, außer das Parallelenaxiom, erfüllen. Dies würde die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms zeigen. Es gelangte ihm auch letztendlich, solch eine Geometrie zu entwickeln, er veröffentlichte sie jedoch nicht.

Somit teilen sich zwei Mathematiker den Ruhm, Begründer der nichteuklidischen Geometrie zu sein. Es sind *Nikolai Iwanowitsch Lobatschewskij* (1793-1856) und *János Bolyai* (1802-1860), denen es unabhängig voneinander gelang, sogenannte nichteuklidische Geometrien zu entwickeln (wobei Bolyai Unterstützung von Gauß erhielt). Da die mathematische Welt jedoch von der Vorstellung geprägt war, das Parallelenaxiom sei kein Axiom, fanden diese neu entwickelten Geometrien in der Fachwelt zunächst wenig Anerkennung (was bei Bolyai zu großen seelischen Problemen führte).

Doch im Laufe des Jahrhunderts reifte mehr und mehr die Einstellung, daß das Parallelenaxiom wohl doch unabhängig von den anderen Axiomen Euklids ist. Somit war die nichteuklidische Geometrie geboren und man suchte nach weiteren Modellen dieser Geometrie.

Unter anderem entwickelte *Bernhard Riemann* (1826-1866) in der Mitte des 19. Jahrhunderts die elliptische und die hyperbolische Geometrie als Modelle der nichteuklidischen Geometrie. Mit der hyperbolischen Geometrie und deren Modellen werden wir uns hier beschäftigen.

Das erste Modell, das wir hier behandeln, ist das Grundmodell H^+ . Die hyperbolische Geometrie ist die Geometrie auf dem Einheitshyperboloid $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, x_0 > 0$. Dabei ist bemerkenswert, daß der Zusammenhang zwischen dem Begriff „hyperbolische Geometrie“ und dem Hyperboloid rein zufällig ist. Der Begriff wurde bereits erfunden, bevor die Geometrie auf H^+ entwickelt war. Er stand also zunächst nicht im Bezug zum Hyperboloid.

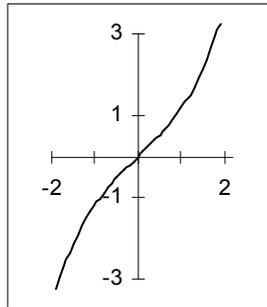
Wir entwickeln in diesem Modell eine Metrik, definieren Geraden, leiten explizite Abstandsfunktionen zweier Punkte her und bestimmen die Bewegungsgruppe (Isometrien). Danach wird etwas ausführlicher die hyperbolische Trigonometrie behandelt.

Man erhält weitere Modelle der hyperbolischen Geometrie, indem man das Modell H^+ isometrisch abbildet. Dabei behandeln wir zunächst das Einheitskreisscheibenmodell und das Halbebenenmodell von *Henri Poincaré* (1854-1912), das Hemisphärenmodell und am Ende das Modell von *Felix Klein* (1849-1925). In jedem dieser Modelle werden Metrik, Geraden, Isometrien und explizite Abstandsfunktionen behandelt. Darunter stoßen wir auf Begriffe wie Möbiustransformation und Poincaré-Erweiterung. In einem Zwischenparagrafen werden einige geometrische Betrachtungen etwas Anschauung liefern, und wird kurz die hyperbolische Trigonometrie aus etwas anderer Sicht als im H^+ -Modell behandelt.

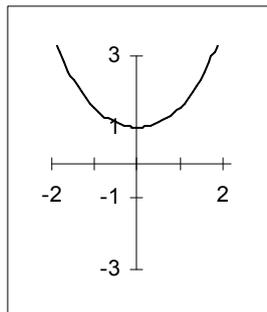
§ 1 Grundlagen

1.1 Die Hyperbelfunktionen

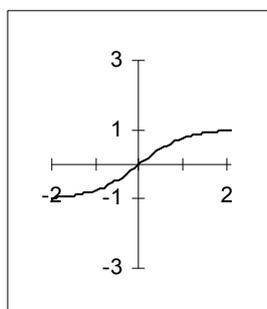
Sinus Hyperbolicus: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



Cosinus Hyperbolicus: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



Tangens Hyperbolicus: $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$



Die Funktionen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert (\mathbb{R} = Körper der reellen Zahlen).

Es gilt offensichtlich: $\sinh'(x) = \cosh(x)$, $\cosh'(x) = \sinh(x)$

1.2 Die Area-Funktionen (Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen)

$$y = \sinh(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{arsinh}(y) \quad \text{Area Sinus Hyperbolicus}$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x - e^{-x} \quad \text{Substituiere } z := e^x$$

$$2y = z - 1/z$$

$$z^2 - 2yz - 1 = 0$$

$$z_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Wegen der Eindeutigkeit, und weil $z > 0$ sein muß, nehme $z = y + \sqrt{y^2 + 1}$

Es gilt $e^x = z \Leftrightarrow x = \ln(z)$

$$x = \operatorname{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Der arsinh ist für alle $y \in \mathbb{R}$ definiert.

$$y = \cosh(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{arcosh}(y) \quad \text{Area Cosinus Hyperbolicus}$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x + e^{-x} \quad \text{Substituiere } z := e^x$$

$$2y = z + 1/z$$

$$z^2 - 2yz + 1 = 0$$

$$z_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Wegen der Eindeutigkeit nehme $z = y + \sqrt{y^2 - 1}$

Es gilt $e^x = z \Leftrightarrow x = \ln(z)$

$$x = \operatorname{arcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Der arcosh ist für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 1$ definiert und ist ≥ 0 .

$$y = \tanh(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{artanh}(y) \quad \text{Area Tangens Hyperbolicus}$$

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

$$x = \operatorname{artanh}(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$$

Der artanh ist für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < 1$ definiert.

1.3 Rechenregeln für die Hyperbelfunktionen

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1: \quad (1.3.1)$$

$$\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x): \quad (1.3.2)$$

$$\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

$$\cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) = \cosh(b - c) : \quad (1.3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^b + e^{-b}}{2} \frac{e^c + e^{-c}}{2} - \frac{e^b - e^{-b}}{2} \frac{e^c - e^{-c}}{2} &= \frac{1}{4} (e^{b+c} + e^{b-c} + e^{c-b} + e^{-b-c} - e^{b+c} + e^{b-c} + e^{c-b} - e^{-b-c}) \\ &= \frac{e^{b-c} + e^{-(b-c)}}{2} \end{aligned}$$

$$2 \sinh(x) \cosh(x) = \sinh(2x): \quad (1.3.4)$$

$$2 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

$$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}: \quad (1.3.5)$$

$$1 - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

$$1 + \tanh^2(x) = \frac{\cosh(2x)}{\cosh^2(x)}: \quad (1.3.6)$$

$$1 + \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) + \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh(2x)}{\cosh^2(x)}$$

1.4 Kurzer Blick auf die komplexen Zahlen

C = Körper der komplexen Zahlen

$z := x + iy \in C$ ist komplexe Zahl, $i := \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit

$\bar{z} := x - iy \in C$ ist die konjugiert komplexe zu z

$\operatorname{Re}(z) := x$, $\operatorname{Im}(z) := y$ sind Real- bzw. Imaginärteil von z

Betrag einer komplexen Zahl: $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Man hat eine kanonische Bijektion zwischen R^2 und C :

$$\begin{aligned} R^2 &\rightarrow C \\ (x, y) &\mapsto x + iy \end{aligned}$$

womit man C mit dem R^2 identifiziert.

1.5 Kreis-, Sphären-, Ebenengleichung, kurze Betrachtung der sphärischen Geometrie

Definiere Quadratische Formen:

$$\text{Im } R^2: \langle x, y \rangle := x_0y_0 + x_1y_1 \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in R^2$$

$$\text{Im } R^3: \langle x, y \rangle := x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^3$$

Analoges gilt für Vektoren im R^n .

Betrag eines Vektors x : $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Sphärengleichung: die n -dimensionale Sphäre $S(a, r)$ mit Mittelpunkt a und Radius r ist gegeben durch

$$S(a, r) := \{x \in R^n; |x - a| = r\} \subset R^n, a \in R^n, r \in R \setminus \{0\}$$

Im Fall $n = 2$ beschreibt dies einen Kreis im R^2 . Für diesen Fall kann man auch die komplexe Darstellung zu Rate ziehen:

$$S(a, r) := \{z \in C; |z - a| = r\} \subset C, a \in C, r \in R \setminus \{0\}$$

Spezialfall: $S^{n-1} := S(0, 1) = \{x \in R^n; |x| = 1\}$ ist sog. Einheitskugel (oder für $n = 2$ sog. Einheitskreis S^1).

Ebenengleichung: eine Menge

$$P(a, t) := \{x \in \mathbb{R}^n; \langle a, x \rangle = t\} \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R}$$

ist eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperebene im \mathbb{R}^n mit Normalenvektor a . Sie hat vom Nullpunkt den euklidischen Abstand $|t|/|a|$. Für den Fall $n=2$ ist dies eine euklidische Gerade.

Sphärische Geometrie: sie ist die Geometrie auf der Einheitskugel $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Geraden in S^2 sind die sog. Großkreise, d.h. Schnitte von zweidimensionalen Untervektorräumen mit S^2 . Es ist offensichtlich, daß sich zwei Geraden in S^2 in genau zwei Punkten schneiden.

Der sphärische Abstand zweier Punkte $x, y \in S^2$ ist gegeben durch

$$d(x, y) = \arccos(\langle x, y \rangle) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}|x - y|\right) = 2 \arccos\left(\frac{1}{2}|x + y|\right)$$

Seien $\beta_1(t), \beta_2(t)$ zwei Geraden, die durch die Bogenlänge t parametrisiert sind, $\beta_1(0) = \beta_2(0)$. Dann ist der Schnittwinkel α der beiden Geraden gegeben durch

$$\cos(\alpha) = \langle \dot{\beta}_1(0), \dot{\beta}_2(0) \rangle, \quad \dot{\beta} := \frac{d\beta}{dt}$$

1.6 Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung (ohne Beweis)

Gegeben $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $\langle x, y \rangle \leq |x| |y|$ (1.6.1)

1.7 Notation

Mit dx^2 ist das Quadrat des Differentials dx gemeint (d.h. $dx^2 = (dx)^2$), nicht etwa $d(x^2)$.

Der Ausdruck $d(x, y)$ bezeichnet prinzipiell den Abstand der Punkte x und y , und zwar unabhängig davon, in welchem hyperbolischen Modell x und y liegen. Um erkennen zu können, um welches Modell es sich handelt, wird hinter einer Abstandsbeziehung immer die Zugehörigkeit von x und y genannt, z.B.

$$d(x, y) = \dots \quad x, y \in H^+$$

Bem.: Des öfteren werden aus Platzgründen die Spaltenvektoren als Zeilenvektoren dargestellt.

§ 2 Das H^+ -Modell der hyperbolischen Geometrie

Der große Vorteil der Geometrie auf diesem Modell liegt in der großen Analogie zur sphärischen Geometrie. Viele Gesetze, die für H^+ gelten, haben daher auch schon äußerlich eine große Ähnlichkeit zu entsprechenden Gesetzen, die in S^2 gültig sind. Man erkennt das z.B. schon, wenn man die Parametrisierungen des Einheitskreises und der Einheitshyperbel gegenüberstellt:

Einheitskreis: $x_1^2 + x_2^2 = 1$ wird parametrisiert durch $(\cos(t), \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, denn wegen $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ erfüllt jeder solche Punkt die Einheitskreisgleichung.

Einheitshyperbel: $x_1^2 - x_2^2 = 1$ wird parametrisiert durch $(\cosh(t), \sinh(t))$, $t \in \mathbb{R}$, denn wegen $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ erfüllt jeder solche Punkt die Einheitshyperbelgleichung.

Viele Beziehungen der sphärischen Geometrie sind daher leicht auf H^+ übertragbar, indem man \cos durch \cosh ersetzt und entsprechende quadratische Formen austauscht.

Definiere zunächst quadratische Formen für H^+ , ähnlich denen von S^2 :

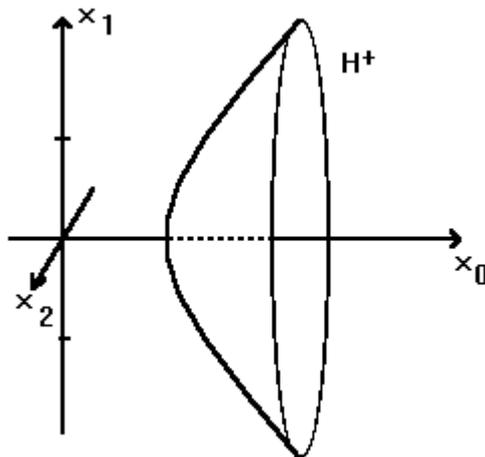
$$\sigma(x, y) := x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$q(x) := \sigma(x, x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$$

Definiere nun H^+ :

$$H^+ := \{x \in \mathbb{R}^3; q(x) = 1, x_0 > 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

Dies ist die rechte Schale des zweischaligen Einheitshyperboloids:



2.1 Die Metrik auf dem Hyperboloid

Satz 2.1.1: Sei $\alpha(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset H^+$, $t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ eine differenzierbare Kurve, die ganz in H^+ verläuft (d.h. $\alpha_0(t) > 0$). Dann gilt:

$$-q(\dot{\alpha}) \geq 0.$$

Beweis: Es gilt (ohne Berücksichtigung von t) [1]:

$$\alpha_0^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1$$

Bilde Ableitung:

$$2\alpha_0\dot{\alpha}_0 = 2\alpha_1\dot{\alpha}_1 + 2\alpha_2\dot{\alpha}_2 \quad (2.1.1)$$

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{\alpha_1\dot{\alpha}_1 + \alpha_2\dot{\alpha}_2}{\alpha_0}$$

$$\begin{aligned} q(\dot{\alpha}) &= \dot{\alpha}_0^2 - (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) = \frac{(\alpha_1\dot{\alpha}_1 + \alpha_2\dot{\alpha}_2)^2}{\alpha_0^2} - (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) \\ &\leq \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2)}{\alpha_0^2} - \frac{(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2)\alpha_0^2}{\alpha_0^2} && \text{wegen (1.6.1)} \\ &= -\frac{\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2}{\alpha_0^2} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -q(\dot{\alpha}) \geq 0 \quad \square$$

Somit kann man eine Metrik konstruieren mittels dem Bogenlängenelement

$$ds^2 = -q(dx) = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2$$

Die Bogenlänge einer Kurve $\alpha: [t_1, t_2] \rightarrow H^+$ ergibt sich dann zu

$$l(\alpha) := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-q(\dot{\alpha})} dt \quad [1] \quad (2.1.2)$$

Der hyperbolische Abstand zweier Punkte $x, y \in H^+$ ist dann gegeben durch

$$d(x, y) := \inf_{\alpha} l(\alpha), \quad [1]$$

wobei das Infimum über alle Kurven α genommen wird, die x und y verbinden.

Bestimmung einer expliziten Abstandsfunktion:

Satz 2.1.2: Seien $x = (x_0, x_1, 0)$, $y = (y_0, y_1, 0) \in H^+$ zwei Punkte auf H^+ . Dann gilt:

$$d(x, y) = \operatorname{arcosh}(x_0y_0 - x_1y_1) = \operatorname{arcosh}(\sigma(x, y)).$$

Beweis: Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha: [t_1, t_2] \rightarrow H^+$, $\alpha(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t))$, eine stetig differenzierbare Kurve auf H^+ mit $\dot{\alpha}_0(t) \neq 0$ für alle $t \in [t_1, t_2]$, die x und y verbindet, d.h. $\alpha(t_1) = x$, $\alpha(t_2) = y$. Dann gilt nach (2.1.2)

$$\begin{aligned}
l(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{(-\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2)(\alpha_0^2 - 1)}{\alpha_0^2 - 1}} dt && (\alpha_0 \neq 1) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{-\dot{\alpha}_0^2 \alpha_0^2 + \dot{\alpha}_1^2 \alpha_0^2 + \dot{\alpha}_2^2 \alpha_0^2 + \dot{\alpha}_0^2 - \dot{\alpha}_1^2 - \dot{\alpha}_2^2}{\alpha_0^2 - 1}} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{-\dot{\alpha}_1^2 \alpha_1^2 - 2\dot{\alpha}_1 \alpha_1 \dot{\alpha}_2 \alpha_2 - \dot{\alpha}_2^2 \alpha_2^2 + \dot{\alpha}_1^2 \alpha_0^2 + \dot{\alpha}_2^2 \alpha_0^2 + \dot{\alpha}_0^2 - \dot{\alpha}_1^2 - \dot{\alpha}_2^2}{\alpha_0^2 - 1}} dt && \text{wegen (2.1.1)} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\dot{\alpha}_1^2 (\alpha_0^2 - \alpha_1^2 - 1) - 2\dot{\alpha}_1 \alpha_1 \dot{\alpha}_2 \alpha_2 + \dot{\alpha}_2^2 (\alpha_0^2 - \alpha_2^2 - 1) + \dot{\alpha}_0^2}{\alpha_0^2 - 1}} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\dot{\alpha}_1^2 \alpha_2^2 - 2\dot{\alpha}_1 \alpha_1 \dot{\alpha}_2 \alpha_2 + \dot{\alpha}_2^2 \alpha_1^2 + \dot{\alpha}_0^2}{\alpha_0^2 - 1}} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{(\dot{\alpha}_1 \alpha_2 - \alpha_1 \dot{\alpha}_2)^2 + \dot{\alpha}_0^2}{\alpha_0^2 - 1}} dt \\
&\geq \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\dot{\alpha}_0^2}{\alpha_0^2 - 1}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\alpha}_0|}{\sqrt{\alpha_0^2 - 1}} dt = |\operatorname{arcosh}(\alpha_0(t_2)) - \operatorname{arcosh}(\alpha_0(t_1))| \\
&= |\operatorname{arcosh}(y_0) - \operatorname{arcosh}(x_0)|
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcosh}(y_0) - \operatorname{arcosh}(x_0) &= \ln(y_0 + \sqrt{y_0^2 - 1}) - \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}) \\
&= \ln \frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1} = \ln \frac{(y_0 + y_1)(x_0 - x_1)}{x_0^2 - x_1^2} \\
&= \ln(x_0 y_0 - x_1 y_1 + (x_0 y_1 - x_1 y_0))
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$l(\alpha) \geq |\ln(x_0 y_0 - x_1 y_1 + (x_0 y_1 - x_1 y_0))|$$

Zeige nun folgende Identität: $(x_0 y_1 - x_1 y_0)^2 = (x_0 y_0 - x_1 y_1)^2 - 1$

$$\begin{aligned}
x_0^2 y_1^2 - 2x_0 x_1 y_0 y_1 + x_1^2 y_0^2 &= (1 + x_1^2) y_1^2 - 2x_0 x_1 y_0 y_1 + (x_0^2 - 1) y_0^2 \\
&= y_1^2 - y_0^2 + x_1^2 y_1^2 - 2x_0 x_1 y_0 y_1 + x_0^2 y_0^2 \\
&= -1 + (x_0 y_0 - x_1 y_1)^2
\end{aligned}$$

$$\text{also } x_0 y_1 - x_1 y_0 = \pm \sqrt{(x_0 y_0 - x_1 y_1)^2 - 1}$$

Damit gilt nun

$$\begin{aligned} |\ln(x_0y_0 - x_1y_1 + (x_0y_1 - x_1y_0))| &= |\ln(x_0y_0 - x_1y_1 \pm \sqrt{(x_0y_0 - x_1y_1)^2 - 1})| \\ &= |\pm \operatorname{arcosh}(x_0y_0 - x_1y_1)| = \operatorname{arcosh}(x_0y_0 - x_1y_1) \end{aligned}$$

und somit

$$l(\alpha) \geq \operatorname{arcosh}(x_0y_0 - x_1y_1) \quad (2.1.4)$$

Dies gilt für alle stetig differenzierbaren Kurven α , die x und y verbinden. Findet man nun eine Kurve $\bar{\alpha}$, für die das Gleichheitszeichen gilt, so ist diese Kurve offensichtlich die kürzeste Verbindung zwischen x und y , d.h. es gilt dann

$$l(\bar{\alpha}) = \inf_{\alpha} l(\alpha) = d(x, y)$$

Solch eine Kurve existiert, denn das Gleichheitszeichen in (2.1.4) gilt genau dann, wenn das Gleichheitszeichen in (2.1.3) gilt; dort gilt es, wenn $\alpha_2(t) = 0$ ist für alle $t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$.

In diesem Fall hat $\bar{\alpha}$ dann die Gestalt $\bar{\alpha}(t) = (\bar{\alpha}_0(t), \bar{\alpha}_1(t), 0) \subset H^+$, $t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, mit $\bar{\alpha}(t_1) = x$, $\bar{\alpha}(t_2) = y$, und liegt in dem zweidimensionalen Untervektorraum, der x und y enthält.

Für dieses $\bar{\alpha}$ gilt dann

$$l(\bar{\alpha}) = d(x, y) = \operatorname{arcosh}(x_0y_0 - x_1y_1) = \operatorname{arcosh}(\sigma(x, y)) \quad \text{für obige } x, y. \quad \square$$

Verallgemeinert auf beliebige $x, y \in H^+$ folgt die

Definition 2.1.3: *Der hyperbolische Abstand d zweier Punkte $x, y \in H^+$ ist definiert durch*

$$d(x, y) := \operatorname{arcosh}(\sigma(x, y))$$

Die analoge Definition in der sphärischen Geometrie: $d(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$, $x, y \in S^2$

$d(x, y)$ ist ≥ 0 , denn es ist $\sigma(x, y) \geq 1$:

$$1 + x_1y_1 + x_2y_2 \leq |(1, x_1, x_2)| |(1, y_1, y_2)| = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} \sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2} = x_0y_0$$

$$\sigma(x, y) = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 \geq 1$$

Das Gleichheitszeichen gilt, wenn $(1, x_1, x_2), (1, y_1, y_2)$ linear abhängig sind. Dies kann nur der Fall sein, wenn $x = y$. Für diesen Fall ist $d(x, y) = 0$.

Es gilt offensichtlich auch $d(x, y) = d(y, x)$, somit ist $d(x, y)$ eine Metrik auf H^+ .

Es ist sinnvoll, hier nicht von der, sondern von einer Metrik zu sprechen, denn jede Funktion $k d(x, y)$, $k > 0$, ist wieder eine Metrik. Unsere obige Metrik ($k = 1$) ist eine ausgezeichnete Metrik, denn für sie gilt, wie sich später herausstellen wird, für eine Dreiecksfläche

$$F_{\Delta} = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Weitere Abstandsfunktionen erhält man durch Umformungen:

$$\text{Es ist } q(x-y) = q(x) - 2\sigma(x, y) + q(y) = 2 - 2\sigma(x, y) = 2 - 2\cosh(d(x, y))$$

Aus (1.3.1) und (1.3.2) folgt $1 - \cosh(2x) = -2\sinh^2(x)$ und somit

$$-\frac{q(x-y)}{4} = \sinh^2\left(\frac{1}{2}d(x, y)\right)$$

$$d(x, y) = 2\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{-q(x-y)}}{2}$$

$$\text{analog bei } S^2: d(x, y) = 2\operatorname{arcsin}\frac{|x-y|}{2}$$

Aus (1.3.2) folgt $\cosh^2\left(\frac{1}{2}d(x, y)\right) = \cosh(d(x, y)) - \sinh^2\left(\frac{1}{2}d(x, y)\right)$

$$\begin{aligned}\cosh^2\left(\frac{1}{2}d(x, y)\right) &= \sigma(x, y) + \frac{q(x)}{4} - \frac{\sigma(x, y)}{2} + \frac{q(y)}{4} \\ &= \frac{q(x)}{4} + \frac{\sigma(x, y)}{2} + \frac{q(y)}{4} \\ &= \frac{q(x+y)}{4}\end{aligned}$$

$$d(x, y) = 2\operatorname{arcosh}\frac{\sqrt{q(x+y)}}{2}$$

$$\text{analog bei } S^2: d(x, y) = 2\operatorname{arccos}\frac{|x+y|}{2}$$

$$\tanh(d(x, y)) = \frac{\sinh(d(x, y))}{\cosh(d(x, y))} = \frac{\sqrt{\cosh^2(d(x, y)) - 1}}{\cosh(d(x, y))} = \frac{\sqrt{\sigma^2(x, y) - 1}}{\sigma(x, y)} = \frac{|x \times y|}{\sigma(x, y)}$$

$$d(x, y) = \operatorname{artanh}\frac{|x \times y|}{\sigma(x, y)}$$

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma(x, y) + |x \times y|}{\sigma(x, y) - |x \times y|}$$

2.2 Die hyperbolischen Geraden

Man hat gesehen, daß eine Kurve der Gestalt $\alpha(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), 0) \subset H^+$, $t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, mit $\alpha(t_1) = x$, $\alpha(t_2) = y$, die kürzeste Verbindungslinie von $x = (x_0, x_1, 0)$ und $y = (y_0, y_1, 0)$ ist. Sie ist somit also Teilmenge der hyperbolischen Geraden durch x und y . Da $\alpha(t)$ ganz in der x_0, x_1 -Ebene liegt, definiert man die hyperbolische Gerade durch x und y als Schnitt der x_0, x_1 -Ebene mit H^+ . Die x_0, x_1 -Ebene ist ein zweidimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^3 , und dies führt zur allgemeinen

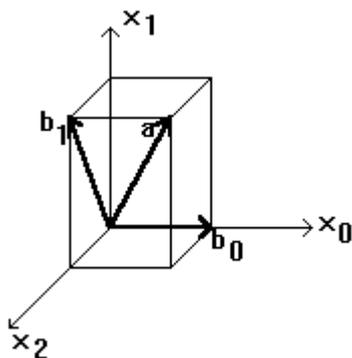
Definition 2.2.1: Die hyperbolischen Geraden in H^+ sind die nichtleeren Schnitte von zweidimensionalen Untervektorräumen des \mathbb{R}^3 mit H^+ .

Dies ist die analoge Definition zur Geradendefinition in der sphärischen Geometrie.

Satz 2.2.2: Sei $E: \langle a, x \rangle = 0$ ein zweidimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^3 mit $a = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ als Normalenvektor. Der Schnitt von E mit H^+ ist genau dann nichtleer, wenn gilt:

$$-q(a) > 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 > a_0^2.$$

Beweis: Zerlege den Vektor a in die beiden Vektoren $b_0 := (a_0, 0, 0)$ entlang der x_0 -Achse und $b_1 := (0, a_1, a_2)$ in der x_1, x_2 -Ebene:



Es ist nun offensichtlich, daß $E \cap H^+ \neq \emptyset \Leftrightarrow |b_1| > |b_0| \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 > a_0^2$, denn genau dann gilt für den Winkel φ zwischen E und der x_0 -Achse (dies ist gleich dem Winkel zwischen a und der x_1, x_2 -Ebene):

$$\tan(\varphi) = \frac{|b_0|}{|b_1|} < 1 \Leftrightarrow \varphi < 45^\circ,$$

was für den Schnitt notwendig ist. Ist $|b_1| \leq |b_0|$, d.h. $a_1^2 + a_2^2 \leq a_0^2$, so ist der Schnitt leer. \square

Satz 2.2.3: Die nichtleeren Schnitte von zweidimensionalen Untervektorräumen mit H^+ sind Hyperbeln.

Beweis: Der zweidimensionale Untervektorraum habe die Gestalt $E: \langle a, x \rangle = 0$ mit $a = (a_0, a_1, a_2) \in R^3 \setminus \{0\}$. Man kann oE den Fall $a_2 = 0$ annehmen, da das ganze System rotationssymmetrisch um die x_0 -Achse ist $\Rightarrow b_1 = (0, a_1, 0)$. E hat somit die Darstellung $a_0 x_0 + a_1 x_1 = 0$. a_0, a_1 seien zunächst $\neq 0$. Es folgt

$x_1 = -\frac{a_0}{a_1} x_0$ Einsetzen in die Hyperboloidgleichung liefert

$$x_0^2 - \frac{a_0^2}{a_1^2} x_0^2 - x_2^2 = 1$$

$$\frac{a_1^2 - a_0^2}{a_1^2} x_0^2 - x_2^2 = 1$$

$$\frac{|b_1|^2 - |b_0|^2}{|b_1|^2} x_0^2 - x_2^2 = 1$$

Hier sieht man schön: ist $|b_1| \leq |b_0|$, so ist dies keine reelle Kurve, d.h. der Schnitt ist leer. Ist dagegen $|b_1| > |b_0|$, so ist dies eine Hyperbel. Diese Hyperbel ist zwar nur die Projektion des Schnittes auf die x_0, x_2 -Ebene, aber es ist klar, daß ein Gebilde, das sich in einem zweidimensionalen Untervektorraum befindet, und das bei Projektion auf eine Koordinatenebene eine Hyperbel ist, selbst eine Hyperbel sein muß.

Ist nun $a_0 = 0, a_1 \neq 0$, so ist $E \cap H^+$ nichtleer, denn $|b_1| > |b_0|$ ist wegen $|b_0| = 0$ erfüllt. E reduziert sich auf $x_1 = 0$. Setzt man dies in die Hyperboloidgleichung ein, so erhält man

$$x_0^2 - x_2^2 = 1$$

Diese Gleichung stellt wieder eine Hyperbel dar.

Ist $a_0 \neq 0, a_1 = 0$, so ist $E \cap H^+$ leer, denn es ist wegen $|b_1| = 0$ immer $|b_1| \leq |b_0|$. E hat die Darstellung $x_0 = 0$. Eingesetzt in die Hyperboloidgleichung erhält man

$$-x_1^2 - x_2^2 = 1$$

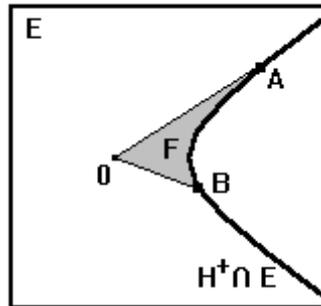
Diese Gleichung stellt, wie erwartet, keine reelle Kurve dar. □

2.3 Der hyperbolische Abstand als Fläche

Satz 2.3.1: Seien $A, B \in H^+$ zwei Punkte auf dem Hyperboloid, E der zweidimensionale Untervektorraum durch A und B. Der hyperbolische Abstand $d(A, B)$ der beiden Punkte läßt sich ausdrücken durch

$$d(A, B) = 2 \frac{\sqrt{-q(A \times B)}}{|A \times B|} F(0AB).$$

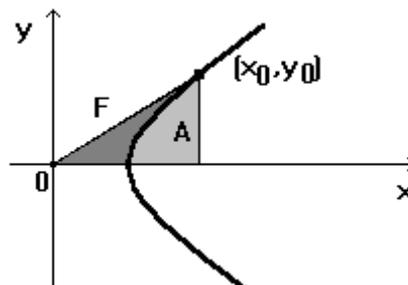
Dabei ist $F(0AB)$ die Fläche des Dreiecks $0AB \subset E$, das durch die Strecken $0A$, $0B$ und den Hyperbelbogen zwischen $A, B \in H^+ \cap E$ begrenzt ist.



Beweis: Betrachte zunächst eine Hyperbel im x, y -Koordinatensystem mit den Halbachsen a und b :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sei (x_0, y_0) ein Punkt der Hyperbel. Dieser läßt sich darstellen durch $(a \cosh(t_0), b \sinh(t_0))$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$. Bestimme nun die Fläche $A = A(x_0)$ zwischen der Hyperbel und der x -Achse.



$$A(x_0) = b \int_a^{x_0} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} dx$$

Substitution: $x = a \cosh(t)$, $dx = a \sinh(t) dt$

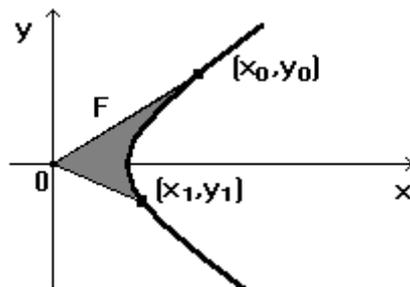
$$\begin{aligned} A(x_0) &= b \int_0^{t_0} \sqrt{\cosh^2(t) - 1} a \sinh(t) dt \\ &= ab \int_0^{t_0} \sinh^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{t_0} (\cosh(2t) - 1) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \left(\frac{1}{2} \sinh(2t_0) - t_0 \right) \\ &= \frac{1}{2} ab \cosh(t_0) \sinh(t_0) - \frac{1}{2} ab t_0 \\ &= \frac{1}{2} x_0 y_0 - \frac{1}{2} ab \operatorname{arcosh}\left(\frac{x_0}{a}\right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}x_0y_0$ ist gerade die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks mit den Eckpunkten 0 , (x_0, y_0) und $(x_0, 0)$. Somit kann man die Fläche $F = F(x_0)$ bestimmen aus der Differenz dieser Dreiecksfläche und der Fläche $A(x_0)$ zu

$$F(x_0) = \frac{1}{2}ab \operatorname{arcosh}\left(\frac{x_0}{a}\right)$$

Läge der Punkt (x_0, y_0) entsprechend unterhalb der x -Achse, so wäre $F(x_0)$ negativ.

Nun seien (x_0, y_0) und (x_1, y_1) zwei beliebige Punkte der Hyperbel. Die Strahlen vom Nullpunkt aus zu diesen Punkten und die Hyperbel begrenzen ein Dreieck. Bestimme nun dessen Fläche F :



$$F = |F_1 - F_2|$$

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2}ab \left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{x_0}{a}\right) - \operatorname{arcosh}\left(\frac{x_1}{a}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh}\left(\frac{x_0}{a}\right) - \operatorname{arcosh}\left(\frac{x_1}{a}\right) &= \ln\left(\frac{x_0}{a} + \sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} - 1}\right) - \ln\left(\frac{x_1}{a} + \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}\right) \\ &= \ln \frac{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}} = \ln \left(\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) \left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right) \right) \\ &= \ln \left(\frac{x_0x_1}{a^2} - \frac{y_0y_1}{b^2} + \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{ab} \right) \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung wie in 2.1 zeigt die Identität

$$\left(\frac{x_1y_0 - x_0y_1}{ab}\right)^2 = \left(\frac{x_0x_1}{a^2} - \frac{y_0y_1}{b^2}\right)^2 - 1. \quad \text{Somit ist}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh}\left(\frac{x_0}{a}\right) - \operatorname{arcosh}\left(\frac{x_1}{a}\right) &= \ln \left(\frac{x_0x_1}{a^2} - \frac{y_0y_1}{b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{x_0x_1}{a^2} - \frac{y_0y_1}{b^2}\right)^2 - 1} \right) \\ &= \pm \operatorname{arcosh} \left(\frac{x_0x_1}{a^2} - \frac{y_0y_1}{b^2} \right) \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$F = \frac{1}{2} ab \left| \pm \operatorname{arcosh} \left(\frac{x_0 x_1}{a^2} - \frac{y_0 y_1}{b^2} \right) \right| = \frac{1}{2} ab \operatorname{arcosh} \left(\frac{x_0 x_1}{a^2} - \frac{y_0 y_1}{b^2} \right) \quad (2.3.1)$$

Bestimmung der Fläche $F(0AB)$: ist E der zweidimensionale Untervektorraum des R^3 , der durch die Punkte A und B geht, so hat er die Gestalt $\langle c, x \rangle = 0$, $c = A \times B = (c_0, c_1, c_2) \in R^3 \setminus \{0\}$, mit $c_1^2 + c_2^2 > c_0^2$. Der Schnitt von E mit H^+ ist bekanntlich ein Hyperbelast H , der A und B enthält. Dieser Hyperbelast habe die Halbachsen a und b .

Legt man nun ein x, y -Koordinatensystem, in dem die gleichen Abstände wie im ursprünglichen (x_0, x_1, x_2) -Koordinatensystem gelten, in die Ebene E derart, daß dessen Ursprung mit dem Ursprung des R^3 übereinstimmt, und der Hyperbelast achsensymmetrisch bezüglich der x -Achse liegt, so haben wir folgende Informationen:

Hyperbelastgleichung: $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x > 0$, A und B liegen auf H .

Weitere Informationen können wir hinzugewinnen:

Behauptung: $a = \frac{|c|}{\sqrt{-q(c)}} = \sqrt{\frac{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}{-c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}}$

Beweis der Behauptung: a ist der Abstand des Scheitels von H vom Nullpunkt. Der Scheitel habe die Koordinaten (x_0, x_1, x_2) . Es gilt für den Winkel φ zwischen E und der x_0 -Achse

$$\tan(\varphi) = \frac{|c_0|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0} = \frac{\sqrt{x_0^2 - 1}}{x_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{x_0^2}}$$

$$1 - \frac{1}{x_0^2} = \frac{c_0^2}{c_1^2 + c_2^2}$$

$$\frac{1}{x_0^2} = 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2 + c_2^2} = \frac{-c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}{c_1^2 + c_2^2}$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{-c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}}$$

$$a^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_0^2 \left(1 + \frac{c_0^2}{c_1^2 + c_2^2} \right) = x_0^2 \left(\frac{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}{c_1^2 + c_2^2} \right)$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}{-c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{-q(c)}} \quad \square$$

Behauptung: Der Schnittwinkel 2α der Asymptoten von H ist gegeben durch

$$\cos(2\alpha) = \frac{c_0^2}{c_1^2 + c_2^2}$$

Beweis der Behauptung: Bestimme den Schnitt der Ebene E mit dem Asymptotenkegel
 $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$:

Wegen der Rotationssymmetrie um die x_0 -Achse sei oE $c_2 = 0$. Dann hat E die Darstellung

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 = 0 \text{ mit } c_1^2 > c_0^2.$$

Der Ausdruck

$$t \left(c_1, -c_0, \pm \sqrt{c_1^2 - c_0^2} \right), t \in \mathbb{R}$$

ist eine Parametrisierung des Schnittes, denn er erfüllt sowohl die Ebenen- als auch die Asymptotenkegelgleichung. Er spiegelt zwei sich im Nullpunkt schneidende Geraden wider, nämlich die Asymptoten von H . Der Winkel zwischen diesen beiden Geraden ist also der gesuchte Winkel 2α . Nimmt man nun die Punkte

$$z_1 = \left(c_1, -c_0, \sqrt{c_1^2 - c_0^2} \right) \text{ und } z_2 = \left(c_1, -c_0, -\sqrt{c_1^2 - c_0^2} \right),$$

die linear unabhängig sind, somit auf verschiedenen Geraden liegen, so ist

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \frac{\langle z_1, z_2 \rangle}{|z_1| |z_2|} \\ &= \frac{c_1^2 + c_0^2 - c_1^2 - c_0^2}{c_1^2 + c_0^2 + c_1^2 - c_0^2} \\ &= \frac{c_0^2}{c_1^2} \end{aligned}$$

Verallgemeinert auf den Fall $c_2 \neq 0$ ergibt sich analog

$$\cos(2\alpha) = \frac{c_0^2}{c_1^2 + c_2^2}. \quad \square$$

Behauptung: $b = 1$

Beweis der Behauptung: Es ist

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{-c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}} \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Aus $\frac{b}{a} = \tan(\alpha)$ folgt $b = 1$. \square

Aus der Kenntnis von a, b und den Beträgen der Punkte A und B kann man nun die Lage von A und B in dem neuen x, y -Koordinatensystem bestimmen.

Behauptung: Die Koordinaten von $A = (A_0, A_1, A_2)$ und $B = (B_0, B_1, B_2) \in H^+$ im neuen x, y -Koordinatensystem sind:

$$\bar{A} = \left(a \sqrt{\frac{|A|^2 + b^2}{a^2 + b^2}}, \pm b \sqrt{\frac{|A|^2 - a^2}{a^2 + b^2}} \right), \quad \bar{B} = \left(a \sqrt{\frac{|B|^2 + b^2}{a^2 + b^2}}, \pm b \sqrt{\frac{|B|^2 - a^2}{a^2 + b^2}} \right)$$

(Ob das Plus- oder Minuszeichen gilt, ergibt sich aus der ursprünglichen Lage der Punkte)

Beweis der Behauptung: Seien (x, y) bzw. (u, v) die neuen Koordinaten von A bzw. B . Dann gelten jeweils zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 & \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} &= 1 \\ x^2 + y^2 &= |A|^2 & u^2 + v^2 &= |B|^2 \end{aligned}$$

Aus diesen lassen sich nun x, y bzw. u, v bestimmen. Die Lösungen sind genau die Punkte \bar{A} bzw. \bar{B} , was man durch Nachprüfen feststellen kann. \square

In unserem Fall ($b = 1$) reduziert sich dies auf

$$\bar{A} = \left(\frac{\sqrt{2} a A_0}{\sqrt{a^2 + 1}}, \pm \sqrt{\frac{|A|^2 - a^2}{a^2 + 1}} \right) = (x, y), \quad \bar{B} = \left(\frac{\sqrt{2} a B_0}{\sqrt{a^2 + 1}}, \pm \sqrt{\frac{|B|^2 - a^2}{a^2 + 1}} \right) = (u, v).$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.3.1) ergibt sich so die Fläche $F(0AB)$ zu

$$\begin{aligned} F(0AB) &= \frac{1}{2} a \operatorname{arcosh} \left(\frac{xu}{a^2} - uy \right) \\ &= \frac{1}{2} a \operatorname{arcosh} \left(\frac{2A_0B_0 \mp \sqrt{(|A|^2 - a^2)(|B|^2 - a^2)}}{a^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Es ist

$$|A|^2 - a^2 = 2A_0^2 - (a^2 + 1), \quad |B|^2 - a^2 = 2B_0^2 - (a^2 + 1) \quad \text{und somit}$$

$$\begin{aligned} (|A|^2 - a^2)(|B|^2 - a^2) &= 4A_0^2B_0^2 - (a^2 + 1)(2A_0 + 2B_0) + (a^2 + 1)^2 \\ &= 4A_0^2B_0^2 + (a^2 + 1)((a^2 + 1) - 2A_0 - 2B_0) \end{aligned}$$

Zeige nun die Identität

$$(a^2 + 1) - 2A_0 - 2B_0 = (a^2 + 1)(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2)^2 - 4A_0B_0(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2):$$

Wir wissen: $a = \sqrt{\frac{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}{-c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}}$ mit $c = A \times B = \begin{pmatrix} A_1B_2 - A_2B_1 \\ A_2B_0 - A_0B_2 \\ A_0B_1 - A_1B_0 \end{pmatrix}$.

$$a^2 + 1 = \frac{2c_1^2 + 2c_2^2}{-c_0^2 + c_1^2 + c_2^2} = \frac{4A_0B_0(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2) - 2A_0^2 - 2B_0^2}{(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2)^2 - 1}$$

$$(a^2 + 1)(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2)^2 - (a^2 + 1) = 4A_0B_0(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2) - 2A_0^2 - 2B_0^2$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} (|A|^2 - a^2)(|B|^2 - a^2) &= 4A_0^2B_0^2 - (a^2 + 1)4A_0B_0(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2) + (a^2 + 1)^2(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2)^2 \\ &= (2A_0B_0 - (a^2 + 1)(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2))^2 \\ \pm \sqrt{(|A|^2 - a^2)(|B|^2 - a^2)} &= 2A_0B_0 - (a^2 + 1)(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2) \end{aligned}$$

Also gilt für die Fläche $F(OAB)$:

$$\begin{aligned} F(OAB) &= \frac{1}{2}a \operatorname{arcosh} \left(\frac{2A_0B_0 - 2A_0B_0 + (a^2 + 1)(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2)}{a^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2}a \operatorname{arcosh}(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2) = \frac{1}{2}a \operatorname{arcosh}(\sigma(A, B)) = \frac{1}{2}a d(A, B) \end{aligned}$$

und für den hyperbolischen Abstand von A und B :

$$d(a, b) = \frac{2}{a} F(OAB) = 2 \frac{\sqrt{-q(A \times B)}}{|A \times B|} F(OAB). \quad \square$$

2.4 Die Isometrien auf dem Hyperboloid

Definition 2.4.1: Seien $x, y \in H^+$. Eine lineare Abbildung $f: H^+ \rightarrow H^+$ ist eine Isometrie von H^+ : $\Leftrightarrow d(x, y) = d(f(x), f(y))$.

Wegen $d(x, y) = \operatorname{arcosh}(\sigma(x, y))$ und $d(f(x), f(y)) = \operatorname{arcosh}(\sigma(f(x), f(y)))$

sind die Isometrien f genau die Abbildungen, welche die quadratische Form $\sigma(x, y)$ invariant lassen und die rechte Hyperboloidschale erhalten. Wie sieht solch ein f aus?

Satz 2.4.2: Die Isometrien f von H^+ sind genau die 3×3 -Matrizen

$$f = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{00} > 0, \text{ für die die folgenden Gleichungen gelten:}$$

$$\begin{aligned}
a_{00}^2 - a_{10}^2 - a_{20}^2 &= 1 & a_{00}a_{01} - a_{10}a_{11} - a_{20}a_{21} &= 0 \\
a_{01}^2 - a_{11}^2 - a_{21}^2 &= -1 & a_{01}a_{02} - a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} &= 0 \\
a_{02}^2 - a_{12}^2 - a_{22}^2 &= -1 & a_{00}a_{02} - a_{10}a_{12} - a_{20}a_{22} &= 0
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Beweis: Die Ungleichung $a_{00} > 0$ sorgt dafür, daß die rechte Hyperboloidschale erhalten bleibt. Es ist $f(x) = f \cdot x = \tilde{f}x$, und die i -te Komponente von $\tilde{f}x$ ist $[\tilde{f}x]_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$ ($i = 0,1,2$).

Nun soll gelten: $\sigma(\tilde{f}x, \tilde{f}y) = \sigma(x, y)$, also

$$[\tilde{f}x]_0[\tilde{f}y]_0 - [\tilde{f}x]_1[\tilde{f}y]_1 - [\tilde{f}x]_2[\tilde{f}y]_2 = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2$$

Es ist

$$[\tilde{f}x]_i[\tilde{f}y]_i = a_{i0}^2x_0y_0 + a_{i1}^2x_1y_1 + a_{i2}^2x_2y_2 + a_{i0}a_{i1}(x_1y_0 - x_0y_1) + a_{i0}a_{i2}(x_2y_0 - x_0y_2) + a_{i1}a_{i2}(x_1y_2 - x_1y_2)$$

und somit

$$\begin{aligned}
[\tilde{f}x]_0[\tilde{f}y]_0 - [\tilde{f}x]_1[\tilde{f}y]_1 - [\tilde{f}x]_2[\tilde{f}y]_2 &= (a_{00}^2 - a_{10}^2 - a_{20}^2)x_0y_0 + (a_{01}^2 - a_{11}^2 - a_{21}^2)x_1y_1 + (a_{02}^2 - a_{12}^2 - a_{22}^2)x_2y_2 \\
&+ (a_{00}a_{01} - a_{10}a_{11} - a_{20}a_{21})(x_1y_0 - x_0y_1) + (a_{00}a_{02} - a_{10}a_{12} - a_{20}a_{22})(x_2y_0 - x_0y_2) \\
&+ (a_{01}a_{02} - a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22})(x_1y_2 - x_2y_1)
\end{aligned}$$

Dies ist genau dann gleich $x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2$, wenn die Gleichungen (2.4.1) gelten. \square

Ist nun $x \in H^+$, d.h. $q(x) = \sigma(x, x) = 1$, dann ist $q(\tilde{f}x) = \sigma(\tilde{f}x, \tilde{f}x) = 1$ und somit $\tilde{f}x \in H^+$.

Satz 2.4.3: Es gilt: $\det(f) = \pm 1$

Beweis:

$$\sigma(x, y) = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 = (x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =: x^t I y$$

$$\sigma(\tilde{f}x, \tilde{f}y) = (\tilde{f}x)^t I (\tilde{f}y)$$

$$f \text{ Isometrie} \Rightarrow \sigma(x, y) = \sigma(\tilde{f}x, \tilde{f}y)$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{f}x)^t I (\tilde{f}y) &= x^t f^t I f y = x^t I y \Rightarrow f^t I f = I \quad \text{und somit} \\
\det(f) \det(I) \det(f) &= \det(I) \Rightarrow \det^2(f) = 1 \Rightarrow \det(f) = \pm 1 \quad \square
\end{aligned}$$

Beispiel: Die Geradenspiegelung auf dem Hyperboloid:

Man wählt einen Punkt $a = (a_0, a_1, a_2) \in R^3$, für den gilt:

$$q(a) = -1.$$

Dann wählt man zusätzlich zwei Punkte $b = (b_0, b_1, b_2)$ und $c = (c_0, c_1, c_2)$ auf dem Asymptotenkegel, d.h.

$$q(b) = q(c) = 0,$$

und zwar so, daß gilt:

$$\sigma(a, b) = \sigma(a, c) = 0.$$

Solche Punkte sind z.B.

$$b = (a_0 a_2 + a_1, a_1 a_2 + a_0, a_2^2 - 1), \quad c = (a_0 a_2 - a_1, a_1 a_2 - a_0, a_2^2 - 1).$$

Die Vektoren a , b und c sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis des R^3 . Jeder Vektor $x \in R^3$ läßt sich also durch sie darstellen:

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c, \quad \alpha, \beta, \gamma \in R$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} q(x) &= \alpha^2 q(a) + \beta^2 q(b) + \gamma^2 q(c) + \alpha\beta \sigma(a, b) + \alpha\gamma \sigma(a, c) + \beta\gamma \sigma(b, c) \\ &= -\alpha^2 + \beta\gamma \sigma(b, c) \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die lineare Abbildung $\tau: R^3 \rightarrow R^3$ mit

$$\tau(a) = -a, \quad \tau(b) = b, \quad \tau(c) = c,$$

so gilt der

Satz 2.4.4: Die Abbildung τ , eingeschränkt auf H^+ , ist die Spiegelung an einer hyperbolischen Geraden und außerdem eine Isometrie von H^+ .

Beweis: Für obiges x ist

$$\tau(x) = -\alpha a + \beta b + \gamma c.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} q(\tau(x)) &= \alpha^2 q(a) + \beta^2 q(b) + \gamma^2 q(c) - \alpha\beta \sigma(a, b) - \alpha\gamma \sigma(a, c) + \beta\gamma \sigma(b, c) \\ &= -\alpha^2 + \beta\gamma \sigma(b, c) \\ &= q(x) \end{aligned}$$

Wenn also $x \in H^+$, d.h. $q(x) = 1$, dann ist $q(\tau(x)) = 1$, also $\tau(x) \in H^+$.

Es gilt offensichtlich auch $\tau^2 = \tau \circ \tau = id$.

Die Fixpunktmenge der Abbildung ist klar: es sind die Punkte b und c , sowie die Linearkombinationen $rb + sc$, $r, s \in R$. Dies ist der zweidimensionale Untervektorraum des R^3 durch die Punkte b und c . Insbesondere ist also der Schnitt dieses Untervektorraumes mit H^+ (dies ist eine hyperbolische Gerade) Teil der Fixpunktmenge von τ , also eine Fixgerade, die Spiegelachse. Also ist τ eine Geradenspiegelung.

Daß τ eine Isometrie ist, wird für folgenden Spezialfall gezeigt:

$$a = (2,1,2), b = (3,0,3), c = (5,4,3)$$

Gesucht ist nun τ mit obigen Eigenschaften. Da τ linear ist, erhält man durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

drei lineare Gleichungssysteme mit jeweils drei Gleichungen und drei Unbekannten, die man eindeutig lösen kann. Daraus erhält man die Abbildungsmatrix für τ . Es ergibt sich

$$\tau = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -8 \\ 4 & -1 & -4 \\ 8 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix erfüllt die Gleichungen (2.4.1), es ist $\det(\tau) = -1$, $a_{00} > 0$. Somit ist τ eine Isometrie von H^+ . \square

Bem.: Die Abbildungen τ werden als harmonische Homologien des R^3 bezeichnet.

Satz 2.4.5: *Isometrien bilden hyperbolische Geraden auf hyperbolische Geraden ab.*

Beweis: Zeige dies für den Spezialfall obiges τ und die Gerade $L := H^+ \cap x_0, x_2$ -Ebene:

Nehme drei Punkte auf L , z.B. $x = (1,0,0)$, $y = (2,0,\sqrt{3})$, $z = (2,0,-\sqrt{3}) \in H^+$, bestimme deren Bildpunkte unter der Abbildung τ :

$$\tau x = (9,4,8), \tau y = (18 - 8\sqrt{3}, 8 - 4\sqrt{3}, 16 - 7\sqrt{3}), \tau z = (18 + 8\sqrt{3}, 8 + 4\sqrt{3}, 16 + 7\sqrt{3})$$

Diese drei Punkte liegen wieder auf H^+ und spannen eine Ebene E auf:

$$E: \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 - 8\sqrt{3} \\ 4 - 4\sqrt{3} \\ 8 - 7\sqrt{3} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 9 + 8\sqrt{3} \\ 4 + 4\sqrt{3} \\ 8 + 7\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Setzt man $r = s = -1/2$, so erkennt man, daß E durch den Nullpunkt geht, somit ist $L' := E \cap H^+$ wieder eine hyperbolische Gerade mit $fx, fy, fz \in L'$. \square

2.5 Hyperbolische Trigonometrie

Definition 2.5.1: Ein Dreieck in H^+ ist ein Tripel $(A, B, C) \in H^+ \times H^+ \times H^+$ von paarweise verschiedenen Punkten $A, B, C \in H^+$, die nicht auf einer hyperbolischen Geraden liegen.

Parametrisierung hyperbolischer Strecken:

Satz 2.5.2: Die hyperbolische Strecke zwischen A und B wird parametrisiert durch

$$p_t(A, B) := \frac{\sinh(c-t)}{\sinh(c)} A + \frac{\sinh(t)}{\sinh(c)} B \in \text{Span}(A, B) \cap H^+, t \in [0, c] \subset \mathbb{R}.$$

Dabei ist $\text{Span}(A, B)$ der zweidimensionale Untervektorraum durch A und B , $c := d(A, B)$.

Beweis: Es ist

$$p_0(A, B) = A, p_c(A, B) = B,$$

Start- und Endpunkt stimmen also. Nun gilt

$$\begin{aligned} \sigma(p_t(A, B), A) &= \sigma\left(\frac{\sinh(c-t)}{\sinh(c)} A, A\right) + \sigma\left(\frac{\sinh(t)}{\sinh(c)} B, A\right) \\ &= \frac{\sinh(c-t)}{\sinh(c)} q(A) + \frac{\sinh(t)}{\sinh(c)} \sigma(A, B) \\ &= \frac{\sinh(c-t)}{\sinh(c)} + \frac{\sinh(t)}{\sinh(c)} \cosh(c) \\ &= \frac{\sinh(c) \cosh(t) - \sinh(t) \cosh(c) + \sinh(t) \cosh(c)}{\sinh(c)} \\ &= \cosh(t) \end{aligned}$$

$$t = \text{arcosh}(\sigma(p_t(A, B), A)) = d(p_t(A, B), A)$$

$$\begin{aligned} \sigma(p_t(A, B), B) &= \sigma\left(\frac{\sinh(c-t)}{\sinh(c)} A, B\right) + \sigma\left(\frac{\sinh(t)}{\sinh(c)} B, B\right) \\ &= \frac{\sinh(c-t)}{\sinh(c)} \sigma(A, B) + \frac{\sinh(t)}{\sinh(c)} q(B) \\ &= \frac{\sinh(c-t)}{\sinh(c)} \cosh(c) + \frac{\sinh(t-c+c)}{\sinh(c)} \\ &= \frac{-\sinh(t-c) \cosh(c) + \sinh(t-c) \cosh(c) + \cosh(t-c) \sinh(c)}{\sinh(c)} \\ &= \cosh(t-c) \end{aligned}$$

$$c-t = \text{arcosh}(\sigma(p_t(A, B), B)) = d(p_t(A, B), B)$$

$$\begin{aligned}
q(p_t(A, B)) &= \sigma(p_t(A, B), p_t(A, B)) = \sigma\left(p_t(A, B), \frac{\sinh(c-t)}{\sinh(c)} A\right) + \sigma\left(p_t(A, B), \frac{\sinh(t)}{\sinh(c)} B\right) \\
&= \frac{\sinh(c-t)}{\sinh(c)} \cosh(t) + \frac{\sinh(t)}{\sinh(c)} \cosh(c-t) \\
&= \frac{\sinh(c-t+t)}{\sinh(c)} = 1
\end{aligned}$$

$$p_t(A, B) \in H^+$$

Somit liegt $p_t(A, B)$ auf der hyperbolischen Geraden durch A und B .

Ableitung der Parametrisierung:

$$\dot{p}_t(A, B) = -\frac{\cosh(c-t)}{\sinh(c)} A + \frac{\cosh(t)}{\sinh(c)} B$$

Es ist

$$\begin{aligned}
q(\dot{p}_t(A, B)) &= \sigma(\dot{p}_t(A, B), \dot{p}_t(A, B)) \\
&= \frac{\cosh^2(c-t)}{\sinh^2(c)} q(A) - 2 \frac{\cosh(c-t) \cosh(t)}{\sinh^2(c)} \sigma(A, B) + \frac{\cosh^2(t)}{\sinh^2(c)} q(B) \\
&= \frac{\cosh^2(c-t) - 2 \cosh(t) \cosh(c-t) \cosh(c) + \cosh^2(t)}{\sinh^2(c)} \\
&= \frac{(\cosh(c) \cosh(t) - \sinh(c) \sinh(t))^2 - 2 \cosh(t) \cosh(c) (\cosh(c) \cosh(t) - \sinh(c) \sinh(t)) + \cosh^2(t)}{\sinh^2(c)} \\
&= \frac{1}{\sinh^2(c)} (\cosh^2(c) \cosh^2(t) - 2 \cosh(c) \cosh(t) \sinh(c) \sinh(t) + \sinh^2(c) \sinh^2(t) - \\
&\quad 2 \cosh^2(t) \cosh^2(c) + 2 \cosh(c) \cosh(t) \sinh(c) \sinh(t) + \cosh^2(t)) \\
&= \frac{-\cosh^2(c) \cosh^2(t) + \sinh^2(c) \sinh^2(t) + \cosh^2(t)}{\sinh^2(c)} = \frac{\cosh^2(t) (1 - \cosh^2(c)) + \sinh^2(c) \sinh^2(t)}{\sinh^2(c)} \\
&= \sinh^2(t) - \cosh^2(t) = -1
\end{aligned}$$

Die „Bahngeschwindigkeit“ hat also den Betrag 1 und somit ist gezeigt, daß die Parametrisierung Sinn macht. \square

Analog werden die hyperbolischen Strecken zwischen A und C bzw. B und C parametrisiert mit den Seitenlängen b und c .

Da nun $q(\dot{p}_t) = -1$, definiert man z.B. den Winkel α zwischen den Strecken $p_t(A, B)$ und $p_t(A, C)$ analog zur sphärischen Geometrie, nur wird die quadratische Form mit einem Minuszeichen versehen (weil $-\sigma$ die Riemannsche Metrik in dieser Geometrie ist):

$$\cos(\alpha) := -\sigma(\dot{p}_0(A, B), \dot{p}_0(A, C)).$$

Analog die Winkel β und γ

Der Seitencosinussatz in der hyperbolischen Geometrie:

Satz 2.5.3: *Es gilt in einem hyperbolischen Dreieck der Seitencosinussatz*

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha)$$

$$\cosh(b) = \cosh(a) \cosh(c) - \sinh(a) \sinh(c) \cos(\beta)$$

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma).$$

Beweis: Es ist

$$\dot{p}_0(A, B) = \frac{-\cosh(c)A + B}{\sinh(c)} ; \quad \dot{p}_0(A, C) = \frac{-\cosh(b)A + C}{\sinh(c)}$$

$$\cos(\alpha) = -\sigma\left(\frac{-\cosh(c)A + B}{\sinh(c)}, \frac{-\cosh(b)A + C}{\sinh(b)}\right)$$

$$\begin{aligned} \sinh(b) \sin(c) \cos(\alpha) &= -(\cosh(b) \cosh(c)) q(A) + \cosh(c) \sigma(A, C) + \cosh(b) \sigma(A, B) - \sigma(B, C) \\ &= \cosh(b) \cosh(c) - \cosh(a) \end{aligned}$$

Analoge Herleitung für die anderen Seiten. \square

Der Sinussatz in der hyperbolischen Geometrie:

Satz 2.5.4: *Es gilt in einem hyperbolischen Dreieck der Sinussatz*

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}.$$

Beweis [1]:

$$\text{Es ist } \cos(\alpha) = \frac{-\cosh(a) + \cosh(b) \cosh(c)}{\sinh(b) \sinh(c)}$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\cosh^2(a) - 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) + \cosh^2(b) \cosh^2(c)}{\sinh^2(b) \sinh^2(c)}$$

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha) \\ &= \frac{\sinh^2(b) \sinh^2(c) - \cosh^2(a) + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(b) \cosh^2(c)}{\sinh^2(b) \sinh^2(c)} \end{aligned}$$

$$\frac{\sinh^2(a)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{\sinh^2(a) \sinh^2(b) \sinh^2(c)}{\sinh^2(b) \sinh^2(c) - \cosh^2(a) + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(b) \cosh^2(c)}$$

Zeige nun die Identität

$$\begin{aligned} \sinh^2(b) \sinh^2(c) - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) \cosh^2(c) \\ = \sinh^2(a) \sinh^2(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(a) \cosh^2(c): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\cosh^2(b) - 1) \sinh^2(c) - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) \cosh^2(c) \\
&= \cosh^2(b) (\sinh^2(c) - \cosh^2(c)) - \sinh^2(c) - \cosh^2(a) \\
&= -\cosh^2(b) - \sinh^2(c) - (\cosh^2(c) - \sinh^2(c)) \cosh^2(a) \\
&= \sinh^2(c) (\cosh^2(a) - 1) - \cosh^2(c) \cosh^2(a) - \cosh^2(b) \\
&= \sinh^2(a) \sinh^2(c) - \cosh^2(b) - \cosh^2(a) \cosh^2(c)
\end{aligned}$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned}
\frac{\sinh^2(a)}{\sin^2(\alpha)} &= \frac{\sinh^2(a) \sinh^2(b) \sinh^2(c)}{\sinh^2(a) \sinh^2(c) - \cosh^2(b) + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(a) \cosh^2(c)} \\
&= \frac{\sinh^2(a) \sinh^2(b) \sinh^2(c)}{\sinh^2(a) \sinh^2(c) \left(1 - \left(\frac{-\cosh(b) + \cosh(a) \cosh(c)}{\sinh(a) \sinh(c)} \right)^2 \right)} \\
&= \frac{\sinh^2(b)}{1 - \cos^2(\beta)} \quad \text{nach dem Seitencosinussatz.}
\end{aligned}$$

Analoges ergibt sich auch für c und γ . \square

Der Winkelcosinussatz in der hyperbolischen Geometrie:

Satz 2.5.5: *Es gilt in einem hyperbolischen Dreieck der Winkelcosinussatz*

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= -\cos(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\beta) \sin(\gamma) \cosh(a) \\
\cos(\beta) &= -\cos(\alpha) \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \sin(\gamma) \cosh(b) \\
\cos(\gamma) &= -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cosh(c).
\end{aligned}$$

Beweis [1]: Es ist

$$\cos^2(\gamma) = \frac{\cosh^2(a) \cosh^2(b) - 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) + \cosh^2(c)}{(\cosh^2(a) - 1)(\cosh^2(b) - 1)}$$

$$\sin^2(\gamma) = 1 - \cos^2(\gamma)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cosh^2(a) \cosh^2(b) - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) + 1 - \cosh^2(a) \cosh^2(b) + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - \cosh^2(c)}{(\cosh^2(a) - 1)(\cosh^2(b) - 1)} \\
&= \frac{1 + 2 \cosh(a) \cosh(b) \cosh(c) - (\cosh^2(a) + \cosh^2(b) + \cosh^2(c))}{(\cosh^2(a) - 1)(\cosh^2(b) - 1)} \\
&=: \frac{d}{(\cosh^2(a) - 1)(\cosh^2(b) - 1)}
\end{aligned}$$

$$\sin(\gamma) = \frac{d^{1/2}}{(\cosh^2(a) - 1)^{1/2} (\cosh^2(b) - 1)^{1/2}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{d^{1/2}}{(\cosh^2(b) - 1)^{1/2} (\cosh^2(c) - 1)^{1/2}}$$

$$\sin(\beta) = \frac{d^{1/2}}{(\cosh^2(a) - 1)^{1/2} (\cosh^2(c) - 1)^{1/2}}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} \cdot \frac{(\cosh^2(a) - 1)^{1/2} (\cosh^2(b) - 1)^{1/2} (\cosh^2(c) - 1)}{(\cosh^2(a) - 1)^{1/2} (\cosh^2(b) - 1)^{1/2} (\cosh^2(c) - 1)} \\ &= \frac{(\cosh(b)\cosh(c) - \cosh(a))(\cosh(a)\cosh(c) - \cosh(b)) + (\cosh(a)\cosh(b) - \cosh(c))(\cosh^2(c) - 1)}{d} \\ &= \frac{1}{d} (\cosh(b)\cosh(a)\cosh^2(c) - \cosh^2(a)\cosh(c) - \cosh^2(b)\cosh(c) + \cosh(a)\cosh(b) \\ & \quad + \cosh^2(c)\cosh(a)\cosh(b) - \cosh^3(c) - \cosh(a)\cosh(b) + \cosh(c)) \\ &= \cosh(c) \frac{1 + 2\cosh(a)\cosh(b)\cosh(c) - (\cosh^2(a) + \cosh^2(b) + \cosh^2(c))}{d} = \cosh(c) \frac{d}{d}, \end{aligned}$$

also

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cosh(c).$$

Analoge Herleitung für die anderen Winkel. \square

Folgerungen aus den Sätzen:

Satz 2.5.6: Für die Winkelsumme im Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Beweis: Nach dem Winkelcosinussatz gilt

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cosh(a) \\ &> -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma) \\ &= -\cos(\beta + \gamma) = \cos(\pi - \beta - \gamma) \end{aligned}$$

Weil der \cos im Bereich $[0, \pi]$ monoton fällt, folgt

$$\alpha < \pi - \beta - \gamma.$$

Daß diese beiden Zahlen wirklich im Bereich $[0, \pi]$ liegen, ist noch zu begründen. Bei α ist das klar. Um $0 < \pi - \beta - \gamma < \pi$ zu begründen, zeigt man $0 < \beta + \gamma < \pi$. Weil $0 < \beta, \gamma < \pi$ und somit $0 < \beta + \gamma < 2\pi$, genügt es, $\sin(\beta + \gamma) > 0$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\sin(\beta + \gamma) &= \sin(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\beta) \sin(\gamma) \\
&= \sin(\beta) \frac{\cosh(a) \cosh(b) - \cosh(c)}{\sinh(a) \sinh(b)} + \sinh(\gamma) \frac{\cosh(a) \cosh(c) - \cosh(b)}{\sinh(a) \sinh(c)} \\
&= \frac{\sin(\alpha)}{\sinh^2(a)} (\cosh(a) \cosh(b) - \cosh(c) + \cosh(a) \cosh(c) - \cosh(b)) \\
&= \frac{\sin(\alpha)}{\sinh^2(a)} (\cosh(a) (\cosh(b) + \cosh(c)) - \cosh(c) - \cosh(b)) \\
&= \frac{\sin(\alpha)}{\sinh^2(a)} ((\cosh(b) + \cosh(c)) (\cosh(a) - 1)) > 0 \quad \square
\end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung:

Satz 2.5.7: *In einem hyperbolischen Dreieck mit den Seiten a , b und c gilt:*

$$a < b + c \Leftrightarrow d(B, C) < d(A, B) + d(A, C).$$

Beweis: Nach dem Seitencosinussatz gilt

$$\begin{aligned}
\cosh(b) &= \cosh(a) \cosh(c) - \sinh(a) \sinh(c) \cos(\beta) \\
&> \cosh(a) \cosh(c) - \sinh(a) \sinh(c) = \cosh(a - c) = \cosh(|a - c|)
\end{aligned}$$

Somit folgt aus der Monotonie des \cosh für Werte > 0 :

$$b > |a - c| \geq a - c,$$

also

$$b + c > a. \quad \square$$

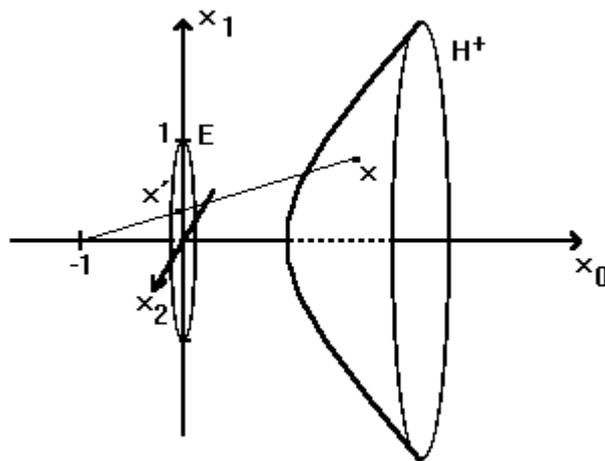
§ 3 Das Poincaré'sche Einheitskreisscheibenmodell

Neben dem Vorteil der großen Analogie zur sphärischen Geometrie, hat das H^+ -Modell auch Nachteile. Unschön ist z.B. die Tatsache, daß H^+ eine Teilmenge des R^3 ist, und so Geradenspiegelungen o.ä. nur sehr schwer zeichnerisch zu realisieren sind. Daher ist es naheliegend, das H^+ -Modell isometrisch auf eine Teilmenge des R^2 abzubilden.

Eine Möglichkeit, die von Poincaré erstmals entworfen wurde, ist die isometrische Abbildung von H^+ auf die Einheitskreisscheibe

$$E := \{x = (x_1, x_2) \in R^2; |x| < 1\}.$$

Sie ergibt sich durch die Zentralprojektion von $(-1, 0, 0)$ auf die x_1, x_2 -Ebene [1]:



Bestimmung der Abbildungsgleichung:

Nimmt man einen Punkt $x = (x_0, x_1, x_2)$ auf H^+ , so hat der Bildpunkt x' die Koordinaten $\lambda(0, x_1, x_2)$, wobei λ noch zu bestimmen ist. Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{x_1}{\lambda x_1} = \frac{1 + x_0}{1} \quad (x_1 \neq 0) \quad \text{und somit} \quad \lambda = \frac{1}{1 + x_0} \quad (\text{auch für } x_1 = 0 \text{ sinnvoll})$$

Also gilt die Abbildungsgleichung

$$f: H^+ \rightarrow E$$

$$x = (x_0, x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_0}, \frac{x_2}{1 + x_0} \right) =: (y_1, y_2) = y \quad [1]$$

Es ist

$$|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1+x_0)^2} = \frac{x_0^2 - 1}{(1+x_0)^2} = \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} < 1,$$

also gilt tatsächlich $y \in E$. Für $x \rightarrow \infty$ (also auch $x_0 \rightarrow \infty$) gilt $|y| \rightarrow 1$, und man sieht, daß der Einheitskreis

$$S^1 = \{x = (x_1, x_2) \in R^2; |x| = 1\}$$

sämtliche unendlich ferne Punkte enthält.

Die Abbildung ist bijektiv, denn man kann eine Umkehrabbildung $g: E \rightarrow H^+$ finden:

Nimmt man einen Punkt $y = (y_1, y_2)$ in E , so liegt, für ein passendes δ , der Punkt $(-1, 0, 0) + \delta((0, y_1, y_2) - (-1, 0, 0)) = (\delta - 1, \delta y_1, \delta y_2)$ auf H^+ . Es muß gelten

$$(\delta - 1)^2 - \delta^2 y_1^2 - \delta^2 y_2^2 = 1$$

$$\delta^2 - 2\delta + 1 - \delta^2 |y|^2 = 1 \quad \text{und wegen } |y| < 1$$

$$\delta^2 - \frac{2}{1-|y|^2} \delta = 0 \Rightarrow \delta_1 = 0, \delta_2 = \frac{2}{1-|y|^2}$$

Der Fall $\delta_1 = 0$ ist auszuschließen, und es ergibt sich die Umkehrabbildung

$$g: E \rightarrow H^+$$

$$y = (y_1, y_2) \mapsto \left(\frac{1+|y|^2}{1-|y|^2}, \frac{2y_1}{1-|y|^2}, \frac{2y_2}{1-|y|^2} \right) =: (g_0(y), g_1(y), g_2(y)) \quad [1]$$

3.1 Die Metrik in E

Satz 3.1.1: *Damit f eine Isometrie von H^+ nach E ist, muß für das Bogenlängelement ds in E , mit dem man die Metrik in E erzeugt, gelten:*

$$ds = \frac{2|dx|}{1-|x|^2}$$

Beweis: Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(f(x), f(y)) & x, y \in H^+, f(x), f(y) \in E & \quad \text{oder äquivalent dazu} \\ d(g(x), g(y)) &= d(x, y) & x, y \in E, g(x), g(y) \in H^+ & \end{aligned}$$

Dabei ist $d(x, y)$ der hyperbolische Abstand von x nach y (näheres dazu in 3.4). Betrachtet man das Bogenlängelement

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2$$

in H^+ , so ergibt sich, daß man in E eine Metrik konstruieren kann mittels dem Bogenlängenelement

$$ds^2 = -dg_0^2 + dg_1^2 + dg_2^2, \quad g_i = g_i(x) \in H^+, x \in E,$$

so daß f tatsächlich eine Isometrie von H^+ auf E bezüglich dieser Metrik ist. Man kann ds noch genauer bestimmen: es ist

$$dg_i = \frac{\partial g_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g_i}{\partial x_2} dx_2, \quad i = 0, 1, 2$$

$$g_0 = \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2} \Rightarrow \frac{\partial g_0}{\partial x_1} = \frac{4x_1}{(1-|x|^2)^2}, \quad \frac{\partial g_0}{\partial x_2} = \frac{4x_2}{(1-|x|^2)^2} \Rightarrow dg_0 = \frac{4(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)}{(1-|x|^2)^2}$$

$$g_1 = \frac{2x_1}{1-|x|^2} \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = \frac{2(1+x_1^2-x_2^2)}{(1-|x|^2)^2}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{4x_1 x_2}{(1-|x|^2)^2} \Rightarrow dg_1 = \frac{2(1+x_1^2-x_2^2)dx_1 + 4x_1 x_2 dx_2}{(1-|x|^2)^2}$$

$$g_2 = \frac{2x_2}{1-|x|^2} \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x_1} = \frac{4x_1 x_2}{(1-|x|^2)^2}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = \frac{2(1-x_1^2+x_2^2)}{(1-|x|^2)^2} \Rightarrow dg_2 = \frac{4x_1 x_2 dx_1 + 2(1-x_1^2+x_2^2)dx_2}{(1-|x|^2)^2}$$

Berechnet man nun $ds^2 = -dg_0^2 + dg_1^2 + dg_2^2$, so ergibt sich nach einigen Schritten

$$ds^2 = \frac{4(1+x_1^4+x_2^4-2x_1^2-2x_2^2+2x_1^2x_2^2)(dx_1^2+dx_2^2)}{(1-|x|^2)^4} = \frac{4(1-|x|^2)^2|dx|^2}{(1-|x|^2)^4} = \frac{4|dx|^2}{(1-|x|^2)^2}$$

$$ds = \frac{2|dx|}{1-|x|^2}. \quad \square$$

Mit diesem Bogenlängenelement kann man nun die Länge einer in E verlaufenden Kurve $\alpha : [t_1, t_2] \rightarrow E$ errechnen. Sie ergibt sich zu

$$l(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2|\dot{\alpha}(t)|}{1-|\alpha(t)|^2} dt$$

und der hyperbolische Abstand zweier Punkte $x, y \in E$ ist, analog wie bei H^+ , gegeben durch

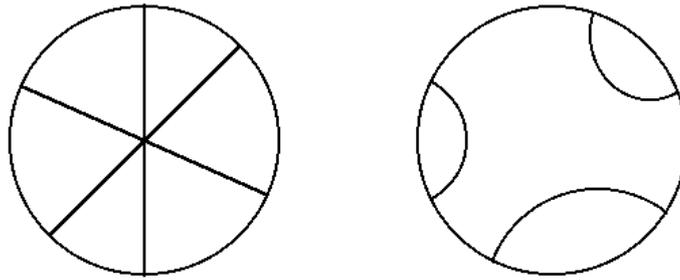
$$d(x, y) = \inf_{\alpha} l(\alpha),$$

wobei die Kurven α die Punkte x und y verbinden (siehe dazu mehr in 3.4).

3.2 Die Geraden in E

Definition 3.2.1: Die hyperbolischen Geraden in E sind entweder Kreisbögen in E , die den Rand von E senkrecht schneiden, oder Durchmesser von E .

Dabei kann man die Durchmesser auch als Kreisbögen unendlich großer Kreise sehen, die den Rand von E senkrecht schneiden.



Satz 3.2.2: Die Abbildung $f: H^+ \rightarrow E$ bildet Geraden von H^+ auf Geraden von E ab.

Beweis: Zur Erinnerung: die Geraden in H^+ sind die nichtleeren Schnitte von zweidimensionalen Untervektorräumen mit H^+ . Nimmt man wie in 2.2 den Fall an, daß dieser Untervektorraum die Gestalt $a_0x_0 + a_1x_1 = 0$ hat mit $a_0, a_1 \neq 0$ (wegen der Rotationssymmetrie um die x_0 -Achse genügt das), $|a_1| > |a_0|$ (damit überhaupt nach 2.2 ein Schnitt existiert), so wird solch eine Gerade parametrisiert durch

$$z(t) = \left(t, -\frac{a_0}{a_1}t, \frac{\pm\sqrt{(a_1^2 - a_0^2)t^2 - a_1^2}}{a_1} \right), t \geq \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}} > 1,$$

denn $z(t)$ erfüllt die Gleichungen $a_0x_0 + a_1x_1 = 0$ und $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$.

Bilde nun $z(t)$ unter f ab:

$$\left(t, -\frac{a_0}{a_1}t, \frac{\pm\sqrt{(a_1^2 - a_0^2)t^2 - a_1^2}}{a_1} \right) \xrightarrow{f} \left(-\frac{a_0t}{a_1(1+t)}, \frac{\pm\sqrt{(a_1^2 - a_0^2)t^2 - a_1^2}}{a_1(1+t)} \right), t \geq \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}$$

Dies ist nun die Parametrisierung der Geraden $f(z(t))$ in E . Diese erfüllt die Kreisgleichung:

$$\left(x_1 + \frac{a_1}{a_0} \right)^2 + x_2^2 = \frac{a_1^2}{a_0^2} - 1$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \left(-\frac{a_0t}{a_1(1+t)} + \frac{a_1}{a_0} \right)^2 + \frac{(a_1^2 - a_0^2)t^2 - a_1^2}{a_1^2(1+t)^2} &= \frac{a_0^2t^2}{a_1^2(1+t)^2} - \frac{2t}{(1+t)} + \frac{a_1^2}{a_0^2} + \frac{t^2}{(1+t)^2} - \frac{a_0^2t^2}{a_1^2(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \\ &= \frac{-2t^2 - 2t + t^2 - 1}{(1+t)^2} + \frac{a_1^2}{a_0^2} = \frac{-(t^2 + 2t + 1)}{(1+t)^2} + \frac{a_1^2}{a_0^2} \\ &= \frac{a_1^2}{a_0^2} - 1 \end{aligned}$$

Dieser Kreis existiert, denn wegen $|a_1| > |a_0|$ ist $\frac{a_1^2}{a_0^2} - 1 > 0$.

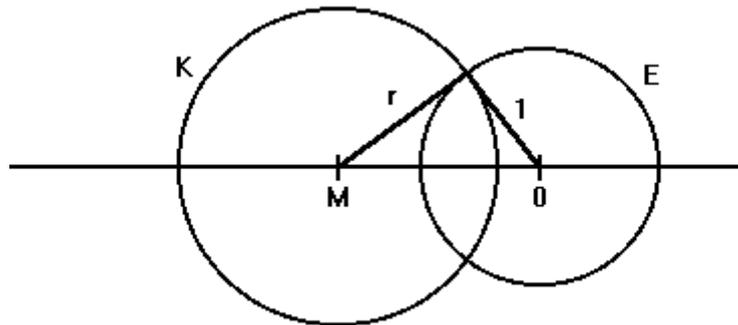
Das heißt, daß $f(z(t))$, also die hyperbolische Gerade in E , auf einem Kreis K mit Mittelpunkt $M = (-a_1/a_0, 0)$ und Radius $r = \sqrt{(a_1^2/a_0^2) - 1}$ liegt. Zugleich verläuft $f(z(t))$ natürlich auch ganz in E , denn es ist

$$|z(t)|^2 = \frac{a_0^2 t^2 + a_1^2 t^2 - a_0^2 t^2 - a_1^2}{a_1^2 (1+t)^2} = \frac{t^2 - 1}{(1+t)^2} = \frac{t-1}{t+1} < 1 \quad (\rightarrow 1 \text{ für } t \rightarrow \infty)$$

Der Mittelpunkt M von K liegt wegen $|a_1| > |a_0|$ außerhalb von E . Man macht folgende Beobachtung: es ist

$$|M|^2 = 1 + r^2,$$

und dies ist genau das Kriterium dafür, daß K und S^1 (also der Rand von E) senkrecht aufeinander stehen (das ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras, siehe Zeichnung).



Nimmt man den Fall $a_0 = 0$ an, so hat der zweidimensionale Untervektorraum die Gestalt $x_1 = 0$ und sein Schnitt mit H^+ , also die Gerade in H^+ , kann parametrisiert werden durch

$$z(t) = \left(t, 0, \pm \sqrt{t^2 - 1} \right), \quad t \geq 1,$$

denn $z(t)$ erfüllt sowohl $x_1 = 0$ als auch $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$.

Bildet man nun dies unter f ab, so erhält man

$$\left(t, 0, \pm \sqrt{t^2 - 1} \right) \xrightarrow{f} \left(0, \pm \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \right), \quad t \geq 1$$

als Parametrisierung der Bildgeraden $f(z(t))$ in E . Dies ist eine vertikale Gerade durch den Nullpunkt, die ganz in E verläuft, also ein Durchmesser von E , denn ist $t \in [1, \infty[$, so gilt

$$\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \in [0, 1[.$$

Der Fall $a_1 = 0$ ist nach 2.2 bekanntlich auszuschließen.

Aus der Rotationssymmetrie der Anordnung um die x_0 -Achse folgt nun die Behauptung. \square

3.3 Die Isometrien von E

Bei der Betrachtung der Isometrien ist es zweckmäßiger, von der reellen Darstellung zur komplexen Darstellung überzugehen. Man identifiziert also den R^2 mit C , wodurch die Einheitskreisscheibe E und der Einheitskreis S^1 folgendermaßen beschrieben werden:

$$E := \{z \in C; |z| < 1\}, \quad S^1 := \{z \in C; |z| = 1\}$$

Im folgenden wird eine bestimmte Art von Abbildungen behandelt, bei denen sich gewisse Spezialfälle als Isometrien von E herausstellen werden. Es sind

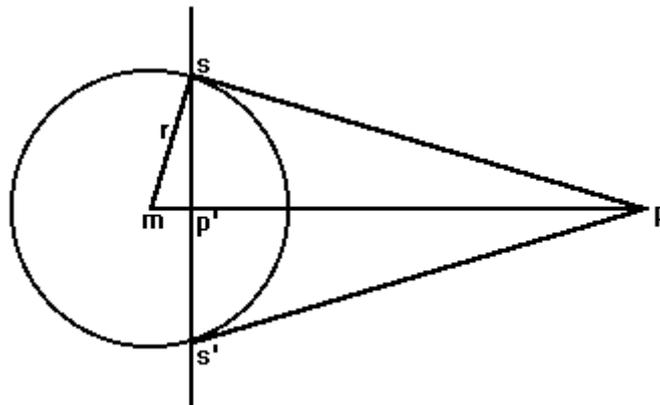
Die Möbiustransformationen

Die Inversion an einem Kreis:

Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt m und Radius r .

Nimmt man einen Punkt p außerhalb des Kreises, so kann man ihn unter Inversion an dem Kreis abbilden: man legt beide Tangenten von p aus an den Kreis und erhält die Berührungspunkte s und s' . Der Schnittpunkt der Geraden durch s und s' (das ist die Polare zum Punkt p) mit der Geraden durch m und p ist der Bildpunkt $\varphi(p) = p'$.

Nimmt man umgekehrt einen Punkt p' innerhalb des Kreises, so erhält man dessen Bildpunkt wie folgt: man zieht durch p' die Senkrechte zur Geraden durch m und p' und erhält als Schnittpunkte mit dem Kreis die Punkte s und s' . Der Schnittpunkt der Tangenten durch s und s' an den Kreis ist der Bildpunkt $\varphi(p') = p$. Offensichtlich gilt $\varphi^2 := \varphi \circ \varphi = id$.



Man erkennt, daß die Abbildung Lücken aufweist: erstens kann der Punkt m nie als Bildpunkt eines Punktes erreicht werden, zweitens kann man den Punkt m nicht abbilden, weil die Tangenten sich dann nicht schneiden (es gilt $\varphi(p) \rightarrow \infty$ für $p \rightarrow m$).

Um diese Lücken zu schließen, erweitert man den R^2 (bzw. C) um einen Punkt, den man „ ∞ “ nennt und ordnet bei der Inversion diesem Punkt den Punkt m zu und umgekehrt, damit die Abbildung wohldefiniert ist. Den neu entstehenden Raum bezeichnet man mit $\hat{R}^2 = R^2 \cup \{\infty\}$ bzw. $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$.

Bestimmung der Abbildungsgleichung

Satz 3.3.1: Für einen Punkt $p \in \hat{R}^2$ gilt:

$$\varphi(p) = p' = \begin{cases} m + \frac{r^2}{|p-m|^2}(p-m) & p \neq m, p \neq \infty \\ \infty & p = m \\ m & p = \infty \end{cases}$$

Dabei ist $m \in R^2$ der Mittelpunkt des Inversionskreises.

Beweis: Das Dreieck mit den Eckpunkten m, s und p ist rechtwinklig. Dadurch gilt die Beziehung

$$|p'-m||p-m| = r^2 \quad \text{und somit} \quad |p'-m| = \frac{r^2}{|p-m|} \quad \text{für } p \neq m.$$

Nun ist

$$p'-m = |p'-m| \frac{p-m}{|p-m|} = \frac{r^2}{|p-m|^2}(p-m),$$

und es folgt die Behauptung. \square

In \hat{C} gilt $|p-m|^2 = (p-m)\overline{(p-m)} = (p-m)(\bar{p}-\bar{m})$ und die Abbildung erhält die Gestalt

$$\varphi(p) = p' = \begin{cases} m + \frac{r^2}{\bar{p}-\bar{m}} & p \neq m, p \neq \infty \\ \infty & p = m \\ m & p = \infty \end{cases} \quad \text{für } p', p \in \hat{C}, m \in C \quad (3.3.1)$$

Durch Nachrechnen kann man auch bestätigen, daß $\varphi^2 = id$ ist.

Betrachtet man den komplexen Fall und einen Punkt $z \in C$ (also $z \neq \infty$) mit $z \neq m$, so gilt

$$\varphi(z) = m + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{m}} = \frac{m\bar{z} + r^2 - |m|^2}{\bar{z} - \bar{m}}.$$

Dies ist eine spezielle Abbildung der Form

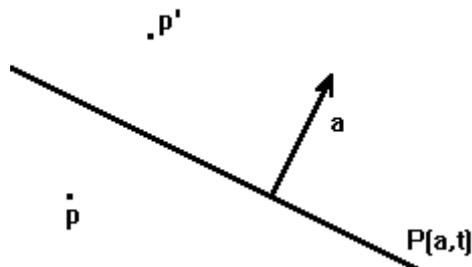
$$\varphi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad (3.3.2)$$

mit

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Die Inversion an einer Geraden (= Geradenspiegelung):

Betrachtet man eine Menge der Gestalt $P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^2; \langle a, x \rangle = t\}$, $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so ist das Bild dieser Menge eine Gerade in der Ebene \mathbb{R}^2 . Der Vektor a ist ein Normalenvektor der Geraden, d.h. steht senkrecht auf ihr. Die Inversion an der Geraden ist nun einfach die orthogonale Spiegelung an g .



Bestimmung der Abbildungsgleichung

Satz 3.3.2: Für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\varphi(p) = p - 2 \langle a, p \rangle \frac{a}{|a|^2}. \quad [1]$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein Normalenvektor der Geraden.

Beweis: Nimmt man einen Punkt p , so hat der Bildpunkt p' die Darstellung

$$p' = \varphi(p) = p + \lambda a,$$

wobei λ noch zu bestimmen ist. Den Wert für λ erhält man dadurch, daß

$$\frac{1}{2}(p + \varphi(p)) = p + \frac{\lambda}{2} a \in g$$

gelten muß, also

$$\langle a, p + \frac{\lambda}{2} a \rangle = t$$

$$\langle a, p \rangle + \frac{\lambda}{2} |a|^2 = t \Rightarrow \lambda = -2 (\langle a, p \rangle - t) \frac{1}{|a|^2} \quad \square$$

Man kann nun auch die Abbildung φ auf \hat{R}^2 erweitern, indem man $\varphi(\infty) = \infty$ setzt.

Die Abbildungsgleichung in komplexer Darstellung:

Betrachtet man nochmals die reelle Darstellung, so gilt für $a = (a_1, a_2)$, $p = (p_1, p_2) \in R^2$

$$\langle a, p \rangle = a_1 p_1 + a_2 p_2$$

Die Frage ist nun, welchen Ausdruck man in C für $\langle a, p \rangle$ benutzt, wenn $a = a_1 + ia_2$, $p = p_1 + ip_2 \in C$. Nun ist

$$\begin{aligned} a_1 p_1 + a_2 p_2 &= \frac{1}{2} (a_1 p_1 + ia_2 p_1 - ia_1 p_2 + a_2 p_2 + a_1 p_1 - ia_2 p_1 + ia_1 p_2 + a_2 p_2) \\ &= \frac{1}{2} ((a_1 + ia_2)(p_1 - ip_2) + (a_1 - ia_2)(p_1 + ip_2)) \\ &= \frac{a \bar{p} + \bar{a} p}{2} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Das heißt, daß man in der komplexen Darstellung $\langle a, p \rangle$ durch $\frac{a \bar{p} + \bar{a} p}{2}$ zu ersetzen hat.

Die Abbildung φ sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= p - 2 \left(\frac{a \bar{p} + \bar{a} p}{2} - t \right) \frac{a}{|a|^2} \\ &= \frac{\bar{a} p - a \bar{p} - \bar{a} p + 2t}{\bar{a}} \\ &= \frac{-a \bar{p} + 2t}{\bar{a}} \end{aligned}$$

Dies ist wieder eine Abbildung der Form (3.3.2), nur mit dem Spezialfall $c = 0$. Für den Fall, daß g durch den Nullpunkt geht (also $t = 0$ gilt), ist auch $b = 0$ und φ reduziert sich auf

$$\varphi(p) = \frac{-a \bar{p}}{\bar{a}} \quad (3.3.4)$$

Verknüpft man zwei Abbildungen der Form (3.3.2), so ergibt sich folgendes: seien

$$\varphi(z) = \frac{a \bar{z} + b}{c \bar{z} + d}, \quad \psi(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} .$$

Dann ist

$$(\varphi \circ \psi)(z) = \frac{a(\bar{\alpha}z + \bar{\beta}) + b(\bar{\gamma}z + \bar{\delta})}{c(\bar{\alpha}z + \bar{\beta}) + d(\bar{\gamma}z + \bar{\delta})} = \frac{(a\bar{\alpha} + b\bar{\gamma})z + a\bar{\beta} + b\bar{\delta}}{(c\bar{\alpha} + d\bar{\gamma})z + c\bar{\beta} + d\bar{\delta}} =: \frac{ez + f}{gz + h} \quad (3.3.5)$$

Definition 3.3.3: Eine Abbildung der Form (3.3.2) oder (3.3.5) heißt allgemeine Möbiustransformation. Sie ist eine beliebige Komposition von Inversionen an Kreisen und Geraden.

Satz 3.3.4: Die allgemeinen Möbiustransformationen bilden bezüglich der Komposition eine Gruppe, die allgemeine Möbiusgruppe.

Beweis: Leicht nachzurechnen: verknüpft man zwei beliebige Abbildungen der Form (3.3.2) oder (3.3.5), erhält man wieder eine Möbiustransformation. Ebenso die Bestimmung einer Inversen. Daß die identische Abbildung auch zu den Möbiustransformationen gehört, ist offensichtlich. \square

Bem.: Die Abbildungen (3.3.2) und (3.3.5) unterscheiden sich nur durch die Bijektion $z \mapsto \bar{z}$, die (als Inversion an der reellen Geraden) selbst wieder eine Möbiustransformation ist.

Satz 3.3.5: Die Inversionen an Geraden in E und deren Zusammensetzungen sind Isometrien von E . Sie haben die Darstellung

$$\varphi(z) = \frac{a\bar{z} + \bar{b}}{b\bar{z} + \bar{a}} \quad \text{bzw.} \quad \varphi(z) = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}},$$

$$\text{mit } a, b \in \mathbb{C}, \det \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} > 0.$$

Beweis: Erinnerung: die Geraden in E sind Durchmesser von E und Kreisbögen in E , die den Rand von E senkrecht schneiden. Welche Gestalt haben nun die Inversionen an diesen Geraden?

Inversion an einem Kreisbogen: nach (3.3.1) gilt für ein $z \in E$

$$\varphi(z) = m + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{m}} = \frac{m\bar{z} + r^2 - |m|^2}{\bar{z} - \bar{m}},$$

wobei m und r Mittelpunkt und Radius des Kreises sind, auf dem der Kreisbogen verläuft.

Nun steht der Kreisbogen senkrecht auf E , d.h. es gilt (siehe 3.2)

$$|m|^2 = 1 + r^2$$

und die Inversion erhält die Gestalt

$$\varphi(z) = \frac{m\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{m}} = \frac{-im\bar{z} + i}{-i\bar{z} + i\bar{m}} =: \frac{n\bar{z} + i}{-i\bar{z} + \bar{n}}$$

Inversion an einem Durchmesser: ein Durchmesser ist Teil einer euklidischen Geraden durch den Ursprung, d.h. es gilt nach (3.3.4) für ein $z \in E$:

$$\varphi(z) = -\frac{a\bar{z}}{\bar{a}} = \frac{ia\bar{z}}{-i\bar{a}} =: \frac{d\bar{z}}{\bar{d}}$$

Setzt man nun mehrere solcher Inversionen zusammen, so erhält man spezielle Möbiustransformationen folgender allgemeiner Gestalt, die eine Untergruppe der Möbiusgruppe bilden:

$$\varphi(z) = \frac{a\bar{z} + \bar{b}}{b\bar{z} + \bar{a}}, \quad \det \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} > 0, \quad \text{bei einer ungeraden Anzahl von Inversionen,} \quad (3.3.6)$$

$$\varphi(z) = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}, \quad \det \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} > 0, \quad \text{bei einer geraden Anzahl von Inversionen.} \quad (3.3.7)$$

Nun gilt es, zunächst zu zeigen, daß für ein $z \in E$ auch $\varphi(z) \in E$ gilt. Dazu werden getrennt die Fälle Inversion an einem Durchmesser und an einem Kreisbogen betrachtet:

Beim der Inversion am Durchmesser ist das schon anschaulich klar, es ist auch leicht zu zeigen. Es gilt nach (3.3.4)

$$|\varphi(z)|^2 = \varphi(z) \overline{\varphi(z)} = \frac{-a\bar{z}}{\bar{a}} \cdot \frac{-\bar{a}z}{a} = |z|^2, \quad \text{also } |z| < 1 \Leftrightarrow |\varphi(z)| < 1.$$

Daß es auch bei der Inversion an einem Kreisbogen gilt, zeigen folgende Betrachtungen:

Behauptung: Sei φ die Inversion an $S(a,r)$. Dann sind äquivalent:

- (i) $S(a,r)$ und S^1 (= Rand von E) stehen senkrecht aufeinander
- (ii) $\varphi(1/\bar{a}) = 0$ ($\Leftrightarrow \varphi(0) = 1/\bar{a}$)
- (iii) $\varphi(E) = E, \varphi(S^1) = S^1$

Beweis der Behauptung [1]: Für den Beweis wird ein Hilfssatz benutzt, der hier nicht bewiesen wird (siehe dazu [1]):

Hilfssatz: Sei ψ eine Möbiustransformation und $S(b,t)$ ein Kreis. ψ sei die Inversion an $S(b,t)$. Dann gilt: sind x und y inverse Punkte bezüglich $S(b,t)$ (d.h. $\psi(x) = y$ oder $\psi(y) = x$), dann sind $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ inverse Punkte bezüglich $\varphi(S(b,t)) := \{\varphi(x); x \in S(b,t)\}$.

(i) \Leftrightarrow (ii): es ist

$$\varphi(z) = a + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}$$

und somit

$$\varphi(0) = a - \frac{r^2}{\bar{a}} = \frac{|a|^2 - r^2}{\bar{a}}$$

Daraus folgt

$$\varphi(0) = 1/\bar{a} \Leftrightarrow |a|^2 - r^2 = 1,$$

d.h. S^1 und $S(a, r)$ stehen senkrecht aufeinander.

(iii) \Rightarrow (ii): Sei σ die Inversion an S^1 . Dann gilt

$$\sigma(a) = 1/\bar{a},$$

d.h. a und $1/\bar{a}$ sind inverse Punkte bezüglich S^1 .

Nach dem o.g. Hilfssatz sind dann $\varphi(a)$ und $\varphi(1/\bar{a})$ inverse Punkte bezüglich $\varphi(S^1)$. Nun ist $\varphi(a) = \infty$ und, nach Voraussetzung, $\varphi(S^1) = S^1$. Dies heißt nun, daß ∞ und $\varphi(1/\bar{a})$ inverse Punkte bezüglich S^1 sind. Somit muß $\varphi(1/\bar{a})$ der Mittelpunkt von S^1 sein, also

$$\varphi(1/\bar{a}) = 0.$$

(i),(ii) \Rightarrow (iii): Nebenrechnung: es ist

$$\begin{aligned} |\varphi(z) - \varphi(w)| &= \left| a + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} - a - \frac{r^2}{\bar{w} - \bar{a}} \right| \\ &= r^2 \left(\left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{a}} - \frac{1}{\bar{w} - \bar{a}} \right) \left(\frac{1}{z - a} - \frac{1}{w - a} \right) \right)^{1/2} \\ &= r^2 \left(\frac{(w - a)(z - a)(\bar{w} - \bar{a} - \bar{z} + \bar{a})}{|z - a|^2 |w - a|^2} \cdot \frac{(\bar{w} - \bar{a})(\bar{z} - \bar{a})(w - a - z + a)}{|z - a|^2 |w - a|^2} \right)^{1/2} \\ &= r^2 \left(\frac{|w - a|^2 |z - a|^2 |w - z|^2}{|z - a|^4 |w - a|^4} \right)^{1/2} = \frac{r^2 |w - z|}{|z - a| |w - a|} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Dadurch gilt

$$|\varphi(z)| = \left| \varphi(z) - \varphi(1/\bar{a}) \right| = \frac{r^2 |z - 1/\bar{a}|}{|z - a| |1/\bar{a} - a|}$$

Es ist

$$\varphi(0) = a - r^2/\bar{a} = 1/\bar{a} \Rightarrow |1/\bar{a} - a| = r^2/|a|$$

und somit

$$\begin{aligned}
|\varphi(z)| &= \frac{|a||z - 1/\bar{a}|}{|z - a|} \\
1 - |\varphi(z)|^2 &= \frac{|z - a|^2 - |a|^2 |z - 1/\bar{a}|^2}{|z - a|^2} \\
&= \frac{|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2 - |a|^2 |z|^2 + a\bar{z} + \bar{a}z - 1}{|z - a|^2} \\
&= \frac{(1 - |z|^2)(|a|^2 - 1)}{|z - a|^2} = \frac{(1 - |z|^2)r^2}{|z - a|^2} \tag{3.3.9}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
|\varphi(z)|^2 &= 1 - \frac{(1 - |z|^2)r^2}{|z - a|^2} < 1 \quad \text{für } |z| < 1, \text{ d.h. } E \text{ bleibt erhalten,} \\
&= 1 \quad \text{für } |z| = 1, \text{ d.h. } S^1 \text{ bleibt erhalten.} \quad \square
\end{aligned}$$

Aus dieser Behauptung gewinnt man noch folgendes: nach (3.3.9) gilt für $|z|, |w| < 1$

$$|z - a|^2 = \frac{(1 - |z|^2)r^2}{1 - |\varphi(z)|^2}, \quad |w - a|^2 = \frac{(1 - |w|^2)r^2}{1 - |\varphi(w)|^2}$$

Eingesetzt in (3.3.8) liefert dies

$$\frac{|\varphi(z) - \varphi(w)|^2}{(1 - |\varphi(z)|^2)(1 - |\varphi(w)|^2)} = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}, \tag{3.3.10}$$

also die Invarianz von $\frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$ unter φ .

Man kann die Behauptung auch verallgemeinern auf beliebige Kreise: seien $S(a, r)$ und $S(b, t)$ zwei aufeinander senkrecht stehende Kreise und φ die Inversion z.B. an $S(b, t)$. Nimmt man einen Punkt z auf $S(a, r)$, so liegt $\varphi(z)$ ebenfalls auf $S(a, r)$. Ein Punkt w innerhalb von $S(a, r)$ wird durch φ auch wieder in das Innere von $S(a, r)$ abgebildet.

Weiter ist nun zu zeigen, daß die Inversionen an Geraden in E (also Abbildungen der Form (3.3.6) oder (3.3.7)) Streckenlängen invariant lassen. Man weiß, daß eine in E verlaufende Kurve $\alpha: [t_1, t_2] \rightarrow E$ die hyperbolische Länge

$$l(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2|\dot{\alpha}(t)|}{1 - |\alpha(t)|^2} dt$$

besitzt. Nimmt man nun ein φ der Gestalt (3.3.6) oder (3.3.7), so hat $\varphi(\alpha)$ die Länge

$$l(\varphi(\alpha)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2|\dot{\varphi}(\alpha(t))|}{1 - |\varphi(\alpha(t))|^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2|\varphi'(\alpha(t))||\dot{\alpha}(t)|}{1 - |\varphi(\alpha(t))|^2} dt$$

Zeige nun, daß $\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}$ gilt, und somit $l(\alpha) = l(\varphi(\alpha))$:

Sei $\varphi(z) = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}$ mit $|a|^2 - |b|^2 > 0$. Dann ist

$$|\varphi'(z)| = \left| \frac{abz + |a|^2 - abz - |b|^2}{(bz + \bar{a})^2} \right| = \frac{|a|^2 - |b|^2}{|(bz + \bar{a})^2|}$$

$$\begin{aligned} |(bz + \bar{a})^2| &= \sqrt{(bz + \bar{a})^2 (\bar{b}\bar{z} + a)^2} \\ &= (bz + \bar{a})(\bar{b}\bar{z} + a) \\ &= |b|^2 |z|^2 + \bar{a}\bar{b}\bar{z} + abz + |a|^2 \\ &= |b|^2 |z|^2 + 2\operatorname{Re}(abz) + |a|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varphi(z)|^2 &= \varphi(z)\overline{\varphi(z)} = \left(\frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}} \right) \left(\frac{\bar{a}\bar{z} + b}{\bar{b}\bar{z} + a} \right) = \frac{|a|^2 |z|^2 + \bar{a}\bar{b}\bar{z} + abz + |b|^2}{|b|^2 |z|^2 + \bar{a}\bar{b}\bar{z} + abz + |a|^2} \\ &= \frac{|a|^2 |z|^2 + 2\operatorname{Re}(abz) + |b|^2}{|b|^2 |z|^2 + 2\operatorname{Re}(abz) + |a|^2} \end{aligned}$$

$$1 - |\varphi(z)|^2 = \frac{(|a|^2 - |b|^2) - (|a|^2 - |b|^2)|z|^2}{|b|^2 |z|^2 + 2\operatorname{Re}(abz) + |a|^2}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} &= \frac{|a|^2 - |b|^2}{(|a|^2 - |b|^2) - (|a|^2 - |b|^2)|z|^2} \\ &= \frac{1}{1-|z|^2}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Somit erhält $\varphi(z) = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}$ also Streckenlängen und ist damit eine Isometrie von E .

Für $\psi(z) = \frac{a\bar{z} + \bar{b}}{b\bar{z} + \bar{a}}$ gilt dasselbe, denn ψ und φ unterscheiden sich lediglich um die Bijektion $\sigma(z) = \bar{z}$ (das ist die Inversion an der reellen Geraden), die auch eine Isometrie von E ist, denn die Betrachtung im Reellen liefert:

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, x_2) &= (x_1, -x_2) =: (\sigma_1, \sigma_2) \\ d\sigma_i &= \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_2} dx_2 \quad (i = 1, 2) \\ d\sigma_1 &= dx_1, \quad d\sigma_2 = -dx_2 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{2|d\sigma|}{1-|\sigma|^2} = \frac{2\sqrt{dx_1^2 + (-dx_2)^2}}{1-(x_1^2 + (-x_2)^2)} = \frac{2\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}}{1-(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{2|dx|}{1-|x|^2}$$

d.h. σ erhält das Bogenlängenelement ds und somit auch Streckenlängen, ist also auch eine Isometrie von E . \square

Somit ist gezeigt, daß die Abbildungen (3.3.6), (3.3.7) Isometrien von E sind. Es wirft sich nun die Frage auf, ob es außer diesen noch mehr Isometrien von E gibt.

Bevor diese Frage beantwortet wird, ist zunächst das Ziel, explizite Abstandsfunktionen herzuleiten, die den hyperbolischen Abstand zweier beliebiger Punkte $z, w \in E$ liefern.

3.4 Der hyperbolische Abstand zweier Punkte in E

Satz 3.4.1: *Der hyperbolische Abstand d von $z, w \in E$ ist gegeben durch*

$$d(z, w) = \ln \frac{|1 - \bar{z}w| + |z - w|}{|1 - \bar{z}w| - |z - w|}.$$

Beweis: Sei $0 < r < 1$, also $r \in E$. Sei $\alpha: [t_1, t_2] \rightarrow E$ eine beliebige differenzierbare Kurve, die ganz in E verläuft und die Punkte 0 und r verbindet, d.h. $\alpha(t_1) = 0, \alpha(t_2) = r$. Dann ist $\alpha(t) = x(t) + iy(t)$. Es gilt nach 3.1

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{2|\dot{\alpha}(t)|}{1-|\alpha(t)|^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}{1-x^2(t) - y^2(t)} dt \\ &\geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{2|\dot{x}(t)|}{1-x^2(t)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{x}(t)|}{1+|x(t)|} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{x}(t)|}{1-|x(t)|} dt \\ &= \ln(1+|x(t_2)|) - \ln(1-|x(t_2)|) \end{aligned}$$

$$l(\alpha) \geq \ln \frac{1+r}{1-r}$$

Die Länge einer die Punkte 0 und r verbindenden Kurve α ist also immer $\geq \ln \frac{1+r}{1-r}$. Dieses Minimum wird angenommen, denn das Gleichheitszeichen gilt dann, wenn $y(t) = 0$ ist für alle $t \in [t_1, t_2]$, also wenn α auf der reellen Geraden liegt. Dann liegt α auf einem Durchmesser und somit auf einer hyperbolischen Geraden von E . Es gilt also

$$d(0, r) = \ln \frac{1+r}{1-r} \quad [1]$$

Nimmt man nun zwei beliebige Punkte $z, w \in E$, so gibt es eine Isometrie g von E , für die gilt:

$$g(z) = 0, g(w) = r, 0 < r < 1.$$

Nach (3.3.10) gilt

$$\frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)} = \frac{|g(z)-g(w)|^2}{(1-|g(z)|^2)(1-|g(w)|^2)} = \frac{r^2}{1-r^2}.$$

Nun ist

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}d(0,r)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+r}{1-r} - 2 + \frac{1-r}{1+r}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+2r+r^2-2+2r^2+1-2r+r^2}{1-r^2}\right) = \frac{r^2}{1-r^2}$$

Das heißt also
$$\frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)} = \sinh^2\left(\frac{1}{2}d(0,r)\right),$$

und weil $d(0,r) = d(g(z),g(w)) = d(z,w)$, folgt für beliebige $z, w \in E$ [1]:

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}d(z,w)\right) = \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)} \quad (3.4.1)$$

Zeige nun folgende Identität: $|z-w|^2 + (1-|z|^2)(1-|w|^2) = |1-\bar{z}w|^2$

$$\begin{aligned} |z-w|^2 + (1-|z|^2)(1-|w|^2) &= |z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z + |w|^2 + 1 - |z|^2 - |w|^2 + |w|^2|z|^2 \\ &= 1 - w\bar{z} - \bar{w}z + |w|^2|z|^2 \\ &= (1-\bar{z}w)(1-z\bar{w}) \\ &= |1-\bar{z}w|^2 \end{aligned}$$

Es ist (nach (1.3.1)) $\cosh^2(x) = \sinh^2(x) + 1$ und somit

$$\cosh^2\left(\frac{1}{2}d(z,w)\right) = \frac{|z-w|^2 + (1-|z|^2)(1-|w|^2)}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$$

$$\cosh^2\left(\frac{1}{2}d(z,w)\right) = \frac{|1-\bar{z}w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$$

Aus $\tanh^2(x) = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}$ ergibt sich

$$\tanh\left(\frac{1}{2}d(z,w)\right) = \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| \quad (3.4.2)$$

$$\frac{1}{2} d(z, w) = \operatorname{artanh} \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{|1-\bar{z}w| + |z-w|}{|1-\bar{z}w| - |z-w|}$$

$$d(z, w) = \ln \frac{|1-\bar{z}w| + |z-w|}{|1-\bar{z}w| - |z-w|} \quad \square$$

Am Ende von 3.3 stellte sich die Frage, ob es außer (3.3.6), (3.3.7) noch andere Isometrien von E gibt. Mit den neuen Erkenntnissen beweisen wir den folgenden

Satz 3.4.2: *Außer den Abbildungen (3.3.6) und (3.3.7) gibt es keine weiteren Isometrien von E .*

Beweis [1]: Sei φ eine beliebige Isometrie von E . Dann kann man eine Isometrie g der Form (3.3.6) oder (3.3.7) finden, so daß

$$g(\varphi(0)) = 0, \quad g(\varphi(R_+)) = R_+, \quad g(\varphi(R_-)) = R_-,$$

wobei

$$R_+ := \{r \in \mathbb{R}; r > 0\} \quad \text{und} \quad R_- := \{r \in \mathbb{R}; r < 0\}$$

Aus der Abstandsbeziehung

$$d(0, t) = d(g\varphi(0), g\varphi(t)) = d(0, g\varphi(t)) \quad \text{für } 0 < t < 1$$

kann man nun ablesen, daß die reelle Achse durch $g\varphi$ unverändert bleibt.

Seien nun $z = x + iy$, $g\varphi(z) = w = u + iv$, $0 < t < 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(t, z) &= d(g\varphi(t), g\varphi(z)) = d(t, w) \\ \frac{|t-z|^2}{(1-t^2)(1-|z|^2)} &= \frac{|t-w|^2}{(1-t^2)(1-|w|^2)} \\ \frac{(t-x)^2 + y^2}{1-x^2-y^2} &= \frac{(t-u)^2 + v^2}{1-u^2-v^2} \end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung folgt $x = u$, $y^2 = v^2$ und somit $w = g(\varphi(z)) = z$ oder \bar{z} .

Damit ist

$$\varphi(z) = g^{-1}(z) \quad \text{oder} \quad g^{-1}(\bar{z})$$

Die Abbildungen g der Form (3.3.6), (3.3.7) bilden eine Untergruppe der Möbiusgruppe, d.h. die Abbildungen g^{-1} sind auch von dieser Form.

Man erkennt nun, daß φ , also eine beliebige Isometrie von E , auch von der Form (3.3.6) oder (3.3.7) ist.

§ 4 Das Poincaré'sche Halbebenenmodell

Dies ist das zweite von Poincaré stammende ebene Modell der hyperbolischen Geometrie. Der Raum, auf der die Geometrie stattfindet, ist hier nicht mehr der Einheitskreis E , sondern die sogenannte „obere Halbebene“

$$H^2 := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\} \quad \text{in der reellen Darstellung,}$$

$$H^2 := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\} \quad \text{in der komplexen Darstellung.}$$

Das ist in der komplexen Ebene gerade der Bereich oberhalb der reellen Achse.

Dieses Modell hat gegenüber dem Einheitskreisscheibenmodell den Vorteil, daß geometrische Konstruktionen einfacher durchzuführen sind (siehe dazu mehr in § 5). Teilweise sind auch die Abstandsbeziehungen einfacher, besonders für übereinanderliegende Punkte.

Man gewinnt dieses Modell, indem man das Einheitskreisscheibenmodell isometrisch abbildet. Dies geschieht mit Hilfe der folgenden Abbildung [1]:

Sei φ die Inversion am Kreis $K := S(i, \sqrt{2})$. Dann hat φ die Gestalt

$$\varphi(z) = i + \frac{2}{\bar{z} + i} = i \frac{\bar{z} - i}{\bar{z} + i}. \quad \text{Bestimmung von Real- und Imaginärteil:}$$

$$\varphi(z) = \frac{(i\bar{z} + 1)(z - i)}{(\bar{z} + i)(z - i)} = \frac{2 \operatorname{Re}(z) + i(|z|^2 - 1)}{|z|^2 - 2 \operatorname{Im}(z) + 1}$$

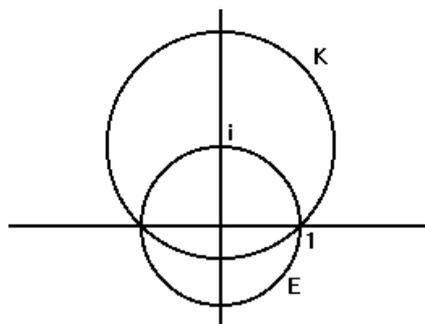
$$\operatorname{Re}(\varphi(z)) = \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 - 2 \operatorname{Im}(z) + 1}, \quad \operatorname{Im}(\varphi(z)) = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 - 2 \operatorname{Im}(z) + 1}$$

Es ist

$$|z|^2 - 2 \operatorname{Im}(z) + 1 = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z) - 2 \operatorname{Im}(z) + 1 = \operatorname{Re}^2(z) + (\operatorname{Im}(z) - 1)^2 \geq 0,$$

das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn

$$\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 1 \Leftrightarrow z = i.$$



Man erkennt, daß für $z \in E$ $\text{Im}(\varphi(z)) < 0$ gilt und umgekehrt, die Werte von $\varphi(z)$ dann also sämtlich unterhalb der reellen Achse liegen. Wendet man nun auf φ die Abbildung $\tau(z) = \bar{z}$ an (das ist ja gerade die Inversion an der reellen Achse), so liegen für $z \in E$ die Werte von $\tau\varphi(z)$ oberhalb der reellen Achse, die Abbildung

$$f(z) := \tau\varphi(z) = -i \frac{z+i}{z-i}$$

ist also zunächst einmal (als Inversion an einem Kreis mit Mittelpunkt i , gefolgt von einer Inversion an einer Geraden) eine Abbildung von $C \setminus \{i\}$ nach $C \setminus \{i\}$, eingeschränkt auf E aber eine Abbildung von E nach H^2 .

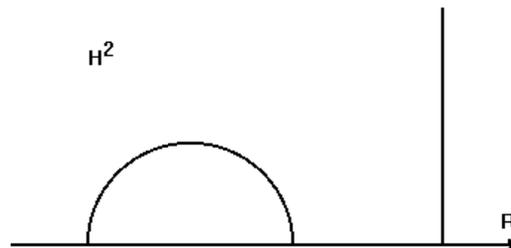
Man kann die Funktion f aber auch wie in (3.3) erweitern auf $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$, indem man dem Punkt i den Punkt ∞ zuordnet und umgekehrt. f ist dann eine Abbildung von \hat{C} nach \hat{C} .

f ist für alle $z \in E$ definiert und eine Bijektion zwischen E und H^2 , denn es existiert eine Umkehrabbildung:

$$\begin{aligned} f(z) = w &= -i \frac{z+i}{z-i} \\ wz - iw &= -iz + 1 \\ (w+i)z &= 1 + iw \\ z &= \frac{iw+1}{w+i} = i \frac{w-i}{w+i} = f^{-1}(w) \quad (z \in E, w \in H^2) \end{aligned}$$

4.1 Die hyperbolischen Geraden

Definition 4.1.1: Die hyperbolischen Geraden in H^2 sind euklidische Halbkreise mit Mittelpunkt auf der reellen Achse, oder Halbgeraden oberhalb der reellen Achse, die senkrecht auf ihr stehen.



Satz 4.1.2: Die Abbildung f ist konform, d.h. winkeltreu.

Beweis: Es ist

$$f'(z) = -i \frac{(z-i) - (z+i)}{(z-i)^2} = -\frac{2}{(z-i)^2}$$

Aus der Funktionentheorie kennt man nun folgenden Satz (siehe dazu [2]):

Eine Abbildung $f: D \rightarrow D'$, $D, D' \subset \mathbb{C}$ offen, ist genau dann konform, falls sie analytisch ist und falls ihre Ableitung in keinem Punkt verschwindet.

Hier ist $D = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ offen, $D' = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ offen, f ist in $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ analytisch, da überall die Ableitung existiert. $f'(z)$ ist $\neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Somit ist f konform. \square

Dann ist f zusätzlich eine Möbiustransformation. Für solche gilt der

Satz 4.1.3: *Möbiustransformationen bilden euklidische Kreise und Geraden wieder auf euklidische Kreise und Geraden ab.*

Beweis: Sei g eine Möbiustransformation. Dann ist

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{oder} \quad \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sei zunächst $c \neq 0$.

$$(az + b) = \frac{a}{c}(cz + d) + \frac{bc - ad}{c}$$

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} = T_{\frac{a}{c}} M_{\frac{bc - ad}{c}} I T_d M_c(z), \quad \text{wobei}$$

$$M_\lambda(z) := \lambda z \quad (\lambda \neq 0) \quad \text{Multiplikation}$$

$$T_\mu(z) := z + \mu \quad \text{Translation}$$

$$I(z) := 1/z \quad \text{Inversion}$$

$$\text{Für } c = 0 \text{ ist } g(z) = \frac{az + b}{d} = T_{\frac{b}{d}} M_{\frac{a}{d}}(z)$$

Also genügt es, die Behauptung für M_λ, T_μ, I und die Abbildung $\tau(z) = \bar{z}$ zu zeigen.

Abbildung von euklidischen Kreisen: die Kreisgleichung sei $|z - m| = r$.

Multiplikation:

$$M_\lambda(z) = w = \lambda z \Leftrightarrow z = \frac{1}{\lambda} w$$

$$\left| \frac{1}{\lambda} w - m \right| = r \quad |\cdot| \lambda$$

$$|w - \lambda m| = |\lambda| r$$

Dies ist ein euklidischer Kreis mit Mittelpunkt λm und Radius $|\lambda| r$.

Translation:

$$T_\mu(z) = w = z + \mu \Leftrightarrow z = w - \mu$$

$$|w - \mu - m| = r$$

Dies ist ein euklidischer Kreis mit Mittelpunkt $\mu + m$ und Radius r .

Inversion:

$$I(z) = w = 1/z \Leftrightarrow z = 1/w$$

$$|1/w - m|^2 = r^2 \quad | \cdot |w|^2$$

$$1 - mw - \bar{m} \bar{w} + (|m|^2 - r^2)|w|^2 = 0$$

Fallunterscheidung:

$$|m|^2 - r^2 = 0: \quad mw + \bar{m} \bar{w} = 1$$

Dies ist eine euklidische Gerade in C .

$$s := |m|^2 - r^2 \neq 0: \quad |w|^2 - mw/s - \bar{m} \bar{w}/s + 1/s = 0$$

$$(w - \bar{m}/s)(\bar{w} - m/s) - |m|^2/s^2 + s/s^2 = 0$$

$$|w - \bar{m}/s| = r/|s|$$

Dies ist ein euklidischer Kreis mit Mittelpunkt \bar{m}/s und Radius $r/|s|$.

Spiegelung an der reellen Achse:

$$\tau(z) = w = \bar{z} \Leftrightarrow z = \bar{w}$$

$$|\bar{w} - m| = |w - \bar{m}| = r$$

Dies ist ein euklidischer Kreis mit Mittelpunkt \bar{m} und Radius r .

Abbildung von euklidischen Geraden: die Geradengleichung sei $a\bar{z} + \bar{a}z = t$. Für M_λ, T_μ, τ ist klar, daß das Bild wieder eine euklidische Gerade ist. Zu zeigen ist noch die Inversion I :

$$I(z) = w = 1/z \Leftrightarrow z = 1/w$$

$$a/\bar{w} + \bar{a}/w = t$$

$$aw + \bar{a}\bar{w} = |w|^2 t^2$$

$$t = 0: \quad aw + \bar{a}\bar{w} = 0$$

Dies ist wieder eine euklidische Gerade in C .

$$t \neq 0: |w|^2 - a w/t - \bar{a} \bar{w}/t + |a|^2/t^2 = |a|^2/t^2$$

$$|w - \bar{a}/t| = |a|/|t|$$

Dies ist ein euklidischer Kreis mit Mittelpunkt \bar{a}/t und Radius $|a|/|t|$. \square

Bemerkung: das Gezeigte besagt insbesondere, daß die Isometrien von E hyperbolische Geraden von E wieder auf hyperbolische Geraden von E abbilden.

Satz 4.1.4: Die Abbildung $f: E \rightarrow H^2$ bildet Geraden von E auf Geraden von H^2 ab.

Erster Beweis: Nach Satz 4.1.3 gilt, daß die Geraden in E , also euklidische Kreisbögen, die den Rand von E ($= S^1$) senkrecht schneiden, oder Durchmesser von E , durch f auf euklidische Kreisbögen und Geradenstücke in H^2 abgebildet werden. Wie ist nun deren Lage?

Die Abbildung f ist konform, also winkeltreu. Man braucht daher nur zu sehen, worauf S^1 abgebildet wird. Dies muß entweder wieder ein euklidischer Kreis oder eine euklidische Gerade sein. Dann müssen die Geraden in H^2 solche euklidischen Kreisbögen bzw. Geradenstücke sein, die in H^2 liegen und die $f(S^1)$ senkrecht schneiden. Es ist

$$f(z) = \frac{(-iz + 1)(\bar{z} + i)}{(z - i)(\bar{z} + i)} = \frac{2 \operatorname{Re}(z) + i(1 - |z|^2)}{|z|^2 + 1 - 2 \operatorname{Im}(z)}$$

und man sieht, daß für $z \in S^1 \setminus \{i\}$ wegen $|z| = 1$ $f(z)$ reelle Werte annimmt, $S^1 \setminus \{i\}$ also auf die reelle Achse abgebildet wird. Dem Punkt i wird bekanntlich ∞ zugeordnet. Somit ist

$$f(S^1) = R \cup \{\infty\}$$

und die Geraden in H^2 sind also euklidische Kreisbögen bzw. Geradenstücke in H^2 , die die reelle Achse senkrecht schneiden. Und dies sind genau die hyperbolischen Geraden. \square

Zweiter Beweis: Man kann auch direkt die Bildgerade einer Geraden in E rechnerisch bestimmen:

Der Kreis, auf dem die Gerade in E liegt, habe die Gleichung $|z - m| = r$ mit $|m|^2 = 1 + r^2$.

$$\text{Nun ist } w = f(z) = \frac{-iz + 1}{z - i} \Leftrightarrow z = f^{-1}(w) = \frac{iw + 1}{w + i}.$$

Das Bild des Kreises hat also die Darstellung

$$\left(\frac{iw + 1}{w + i} - m \right) \left(\frac{-i\bar{w} + 1}{\bar{w} - i} - \bar{m} \right) = r^2$$

$$(iw + 1)(-i\bar{w} + 1) - m(-i\bar{w} + 1)(w + i) - \bar{m}(iw + 1)(\bar{w} - i) + (|m|^2 - r^2)(w + i)(\bar{w} - i) = 0$$

$$|w|^2 - i\bar{w} + iw + 1 - 2 \operatorname{Re}\left(m(2 \operatorname{Re}(w) + i(1 - |w|^2))\right) + |w|^2 + i\bar{w} - iw + 1 = 0$$

$$|w|^2 + 1 - \operatorname{Re}\left(m(2 \operatorname{Re}(w) + i(1 - |w|^2))\right) = 0 \quad (*)$$

Es ist

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re}(m) + i \operatorname{Im}(m))(2 \operatorname{Re}(w) + i(1 - |w|^2)) &= 2 \operatorname{Re}(m) \operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(m)(1 - |w|^2) \\ &\quad + i(2 \operatorname{Im}(m) \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Re}(m)(1 - |w|^2)) \\ \operatorname{Re}(m(2 \operatorname{Re}(w) + i(1 - |w|^2))) &= 2 \operatorname{Re}(m) \operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(m)(1 - |w|^2) \end{aligned}$$

und somit wird aus (*)

$$\begin{aligned} |w|^2 + 1 - 2 \operatorname{Re}(m) \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(m)(1 - |w|^2) &= 0 \\ (1 - \operatorname{Im}(m))|w|^2 - 2 \operatorname{Re}(m) \operatorname{Re}(w) + 1 + \operatorname{Im}(m) &= 0 \end{aligned}$$

Ist nun $\operatorname{Im}(m) = 1$, so ist wegen $|m| > 1$ $\operatorname{Re}(m) \neq 0$ und die Gleichung reduziert sich auf

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{1 + \operatorname{Im}(m)}{2 \operatorname{Re}(m)} = \frac{1}{\operatorname{Re}(m)}.$$

Dies ist eine euklidische Gerade, die senkrecht auf der reellen Achse steht.

Ist $\operatorname{Im}(m) \neq 1$, so gilt

$$\begin{aligned} |w|^2 - \frac{\operatorname{Re}(m)}{1 - \operatorname{Im}(m)}(w + \bar{w}) + \frac{1 + \operatorname{Im}(m)}{1 - \operatorname{Im}(m)} &= 0 \\ \left(w - \frac{\operatorname{Re}(m)}{1 - \operatorname{Im}(m)}\right) \left(\bar{w} - \frac{\operatorname{Re}(m)}{1 - \operatorname{Im}(m)}\right) - \frac{\operatorname{Re}^2(m)}{(1 - \operatorname{Im}(m))^2} + \frac{1 - \operatorname{Im}^2(m)}{(1 - \operatorname{Im}(m))^2} &= 0 \\ \left|w - \frac{\operatorname{Re}(m)}{1 - \operatorname{Im}(m)}\right|^2 = \frac{\operatorname{Re}^2(m) + \operatorname{Im}^2(m) - 1}{(1 - \operatorname{Im}(m))^2} = \frac{|m|^2 - 1}{(1 - \operatorname{Im}(m))^2} = \frac{r^2}{(1 - \operatorname{Im}(m))^2} \end{aligned}$$

Dies ist ein euklidischer Kreis mit Radius $\frac{r}{|1 - \operatorname{Im}(m)|}$ und Mittelpunkt $\frac{\operatorname{Re}(m)}{1 - \operatorname{Im}(m)}$, also auf der reellen Achse.

Betrachtet man nun den Schnitt mit der oberen Halbebene H^2 , so ergeben sich genau die hyperbolischen Geraden in H^2 . \square

4.2 Die Metrik in H^2

Satz 4.2.1: *Damit f eine Isometrie von E nach H^2 ist, muß für das Bogenlängelement ds in H^2 , mit dem man die Metrik in H^2 erzeugt, gelten:*

$$ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im}(z)}.$$

Beweis: Sei $g := f^{-1}$. Damit f eine Isometrie ist, muß gelten:

$$\begin{aligned} d(z, w) &= d(f(z), f(w)), & z, w \in E, f(z), f(w) \in H^2, & \quad \text{oder äquivalent dazu} \\ d(g(z), g(w)) &= d(z, w), & z, w \in H^2, g(z), g(w) \in E \end{aligned}$$

$d(z, w)$ ist der hyperbolische Abstand zweier Punkte in H^2 (näheres dazu in 4.4). Betrachtet man das Bogenlängelement ds in E (in komplexer Darstellung), mit dem man die Metrik in E konstruiert:

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}, \quad z \in E,$$

so kann man in H^2 eine Metrik konstruieren mittels dem Bogenlängelement

$$ds = \frac{2|dg|}{1 - |g(z)|^2} = \frac{2|g'(z)||dz|}{1 - |g(z)|^2}, \quad z \in H^2, g(z) \in E.$$

Nun ist

$$g(z) = i \frac{z - i}{z + i},$$

$$g'(z) = i \frac{z + i - z + i}{(z + i)^2} = \frac{-2}{(z + i)^2}$$

$$|g'(z)| = \frac{2}{\sqrt{(z + i)^2(\bar{z} - i)^2}} = \frac{2}{(z + i)(\bar{z} - i)} = \frac{2}{|z|^2 + i\bar{z} - iz + 1} = \frac{2}{|z|^2 + 2\operatorname{Im}(z) + 1}$$

$$|g(z)|^2 = \left(i \frac{z - i}{z + i} \right) \left(-i \frac{\bar{z} + i}{\bar{z} - i} \right) = \frac{|z|^2 - i\bar{z} + iz + 1}{|z|^2 + i\bar{z} - iz + 1} = \frac{|z|^2 - 2\operatorname{Im}(z) + 1}{|z|^2 + 2\operatorname{Im}(z) + 1}$$

$$1 - |g(z)|^2 = \frac{4\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 2\operatorname{Im}(z) + 1}$$

Es ergibt sich

$$ds = \frac{2|g'(z)||dz|}{1 - |g(z)|^2} = \frac{|dz|}{\operatorname{Im}(z)} \quad \left(= \frac{|dx|}{x_2} \text{ im reellen Fall, } x = (x_1, x_2) \right) \quad \square$$

Mit diesem Bogenelement kann man nun die Länge einer in H^2 verlaufenden Kurve $\alpha: [t_1, t_2] \rightarrow H^2$ bestimmen. Sie ist

$$l(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\alpha}(t)|}{\operatorname{Im}(\alpha(t))} dt.$$

Der hyperbolische Abstand zweier Punkte ist auch in diesem Modell gegeben durch

$$d(z, w) = \inf_{\alpha} l(\alpha), \quad z, w \in H^2.$$

4.3 Die Isometrien

Die Poincaré-Erweiterung [1]:

Erinnerung: die Inversion an einem Kreis mit Mittelpunkt m und Radius r ist gegeben durch

$$\varphi(x) = m + \frac{r^2}{|x - m|^2}(x - m). \quad (4.3.1)$$

Die Inversion an einer Geraden mit Normalenvektor $a \neq 0$ und Abstand $|t|/|a|$ vom Nullpunkt ist gegeben durch

$$\psi(x) = x - 2(\langle a, x \rangle - t) \frac{a}{|a|^2}. \quad (4.3.2)$$

Dabei haben wir bisher angenommen, daß m, a aus dem R^2 , und x aus dem \hat{R}^2 sind ($r, t \in R$). Dies muß aber mitnichten der Fall sein.

Nimmt man z.B. an, daß m, a aus dem R^3 , und x aus dem \hat{R}^3 sind, so haben φ und ψ auch eine geometrische Bedeutung: φ ist dann die Inversion an der Sphäre mit Mittelpunkt m und Radius r , ψ die Inversion an einer Ebene mit Normalenvektor a und Abstand $|t|/|a|$ vom Nullpunkt.

Man kann für m, a und x auch reelle Zahlen einsetzen. Dann findet das ganze Geschehen auf der reellen Zahlengeraden statt. Bei der Abbildung φ besteht der „Kreis“, an dem die Inversion stattfindet, aus den Punkten $m - r$ und $m + r$, der Bereich $\{x \in R; x < m - r, x > m + r\} \cup \{\infty\}$ wird auf das Intervall $\{x \in R; m - r < x < m + r\}$ abgebildet und umgekehrt, die Punkte $m - r, m + r$ bleiben fix. Die Abbildung ψ ist gerade die Punktspiegelung am Punkt t/a .

Allgemein kann man also die Inversionen φ und ψ auf Punkte im \hat{R}^n anwenden. φ ist dann die Inversion an der n -dimensionalen Sphäre mit Mittelpunkt $m \in R^n$ und Radius r , ψ die Inversion an der $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperebene im n -dimensionalen Raum mit Normalenvektor $a \in R^n$ und Abstand $|t|/|a|$ vom Nullpunkt.

Nun bilden die Inversionen φ und ψ und deren Zusammensetzungen, also die Möbiustransformationen, in jeder beliebigen Dimension n eine Gruppe, die allgemeine Möbiusgruppe. Diese sei mit $GM(\hat{R}^n)$ bezeichnet. Die Idee Poincarés war jetzt, eine im \hat{R}^n wirkende Möbiustransformation φ zu erweitern zu einer im \hat{R}^{n+1} wirkenden Möbiustransformation $\tilde{\varphi}$, so daß $GM(\hat{R}^n)$ eine Untergruppe von $GM(\hat{R}^{n+1})$ ist. Dies geschieht mit Hilfe der Einbettung

$$(x_1, \dots, x_n) = x \mapsto \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 0) \quad \text{von } \hat{R}^n \text{ nach } \hat{R}^{n+1}.$$

Ist nun φ die Inversion an $S(m, r)$, $m \in R^n$, im \hat{R}^n , so definiert man die Abbildung $\tilde{\varphi}$ als Inversion an $S(\tilde{m}, r)$ im \hat{R}^{n+1} ; ist ψ die Inversion an $P(a, t)$, $a \in R^n$, im \hat{R}^n , dann ist $\tilde{\psi}$ die

Inversion an $P(\tilde{\alpha}, t)$ im \hat{R}^{n+1} .

Die Abbildungsgleichungen (4.3.1), (4.3.2) für die Inversionen liefern sofort, daß die Hyperebene $x_{n+1} = 0$ sowie die Halbräume $x_{n+1} < 0$, $x_{n+1} > 0$ durch $\tilde{\varphi}$ erhalten bleiben. Nun hat jede Möbiustransformation φ im \hat{R}^n als Zusammensetzung von Inversionen die Darstellung $\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_j$. Dies veranlaßt die folgende

Definition 4.3.1: Die Poincaré-Erweiterung von $\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_j$ in $GM(\hat{R}^n)$ ist die Abbildung

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 \cdots \tilde{\varphi}_j.$$

Diese Abbildung erhält insbesondere natürlich auch den „oberen Halbraum“

$$H^{n+1} := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1}; x_{n+1} > 0\}.$$

Die Poincaré-Erweiterung ist eindeutig, denn wären ψ_1, ψ_2 zwei solcher Erweiterungen, dann würde $\psi_2^{-1}\psi_1$ den R^n fix lassen und auch den Halbraum $x_{n+1} > 0$ erhalten. Es folgt aus einem Satz der Geometrie (siehe dazu [1]), daß $\psi_2^{-1}\psi_1$ die identische Abbildung wäre, d.h. $\psi_1 = \psi_2$.

Die Poincaré-Erweiterung in H^{n+1} :

Satz 4.3.2: Sei $\varphi \in GM(R^n)$, $\tilde{\varphi}$ die Poincaré-Erweiterung von φ . Dann gilt: der Ausdruck

$$\frac{|y-x|^2}{y_{n+1}x_{n+1}}, \quad x, y \in H^{n+1},$$

ist invariant unter $\tilde{\varphi}$.

Beweis [1]: Sei φ die Inversion an $S(m, r)$. Nach (3.3.8) gilt dann

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| = \frac{r^2 |z-w|}{|z-m||w-m|} \quad \text{für komplexe } m, z \text{ und } w.$$

Dies ist aber auch für reelle m, z und w aus dem R^n gültig, was man durch Nachrechnen bestätigen kann.

Ist nun $\tilde{\varphi}$ die Inversion an $S(\tilde{m}, r)$, $m \in R^n$, so gilt also für $x, y \in H^{n+1}$:

$$\frac{|\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(x)|^2}{|y-x|^2} = \frac{r^4}{|x-\tilde{m}|^2 |y-\tilde{m}|^2} \quad (4.3.3)$$

Aus (4.3.1) folgt nun für die $(n+1)$. Komponente $[\tilde{\varphi}(x)]_{n+1}$ von $\tilde{\varphi}(x)$

$$[\tilde{\varphi}(x)]_{n+1} = 0 + \frac{r^2 x_{n+1}}{|x - \tilde{m}|^2} \quad (\text{für } y \text{ analog}).$$

Eingesetzt in (4.3.3) ergibt sich

$$\frac{|\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(x)|^2}{|y - x|^2} = \frac{[\tilde{\varphi}(y)]_{n+1} [\tilde{\varphi}(x)]_{n+1}}{y_{n+1} x_{n+1}}$$

und somit die Invarianz von $\frac{|y - x|^2}{y_{n+1} x_{n+1}}$ unter $\tilde{\varphi}$.

Ist $\tilde{\varphi}$ die Inversion an $P(\tilde{a}, t)$, $a \in R^n$, so gilt für $x, y \in H^{n+1}$:

$\tilde{\varphi}$ ist als Hyperebenen Spiegelung eine euklidische Isometrie, d.h. es gilt

$$|\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(x)| = |y - x|$$

Außerdem gilt nach (4.3.2) für die $(n+1)$. Komponente von $\tilde{\varphi}(x)$

$$[\tilde{\varphi}(x)]_{n+1} = x_{n+1}$$

und es folgt wieder die Invarianz von $\frac{|y - x|^2}{y_{n+1} x_{n+1}}$ unter $\tilde{\varphi}$ und somit unter allen Poincaré-Erweiterungen. \square

Betrachtet man den Grenzübergang $y \rightarrow x$ (und somit $y_{n+1} \rightarrow x_{n+1}$), so erkennt man, daß die Poincaré-Erweiterungen $\tilde{\varphi}$ Isometrien des Raumes H^{n+1} sind, wenn dieser mit einer Metrik, resultierend aus dem Bogenelement

$$\frac{dx}{x_{n+1}},$$

versehen ist.

Für den Spezialfall des Poincaré'schen Halbebenenmodells ($n = 1$) heißt dies nun, daß die Inversionen an Kreisen der Form $S(\tilde{m}, r)$, $m \in R$ oder an Geraden der Form $P(\tilde{a}, t)$, $a \in R$, Isometrien von H^2 sind.

Kreise der Form $S(\tilde{m}, r)$, $m \in R$, sind wegen $\tilde{m} = (m, 0)$ Kreise mit Radius r und Mittelpunkt auf der x_1 -Achse. Geraden der Form $P(\tilde{a}, t)$, $a \in R$, sind wegen $\tilde{a} = (a, 0)$ Geraden, die senkrecht auf der x_1 -Achse stehen. Die Schnitte dieser Kreise und Geraden mit H^2 sind genau die hyperbolischen Geraden in H^2 .

Man erkennt auch hier, daß (analog wie in E) die Inversionen an hyperbolischen Geraden Isometrien von H^2 sind.

Welche Gestalt haben nun diese Isometrien? Betrachtet man das ganze wieder komplex, so gilt der

Satz 4.3.3: Die Isometrien von H^2 haben die Darstellung

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{bzw.} \quad \varphi(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

$$\text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0.$$

Beweis: Man muß die Inversionen an $S(m, r)$, $m \in \mathbb{R}$, in \mathbb{C} und an $P(a, t)$, $a \in \mathbb{R}$, in \mathbb{C} bestimmen.

Inversion an $S(m, r)$, $m \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(z) = m + \frac{r^2}{\bar{z} - m} = \frac{m(-\bar{z}) + m^2 - r^2}{-\bar{z} + m}$$

Inversion an $P(a, t)$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(z) = z - 2 \left(\frac{a\bar{z} + az}{2} - t \right) \frac{1}{a} = -\bar{z} + \frac{2t}{a}$$

Verknüpft man mehrere solcher Abbildungen, so ergeben sich allgemein die Abbildungen

$$\varphi(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0, \quad \text{bei einer ungeraden Anzahl von Inversionen,} \quad (4.3.1)$$

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0, \quad \text{bei einer geraden Anzahl von Inversionen.} \quad (4.3.2)$$

Dies sind wieder Möbiustransformationen, diesmal von der speziellen Gestalt, daß a, b, c, d reell sind. \square

Man kann direkt nachweisen, daß solche Abbildungen H^2 erhalten: es ist

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{(cz + d)(c\bar{z} + d)} \\ &= \frac{ac|z|^2 + bc(\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)) + ad(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) + bd}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{ac|z|^2 + bd + (ad + bc)\operatorname{Re}(z) + i(ad - bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}(\varphi(z)) = \frac{(ad - bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0, \quad \text{weil } (ad - bc), \operatorname{Im}(z) > 0. \quad (4.3.3)$$

Die Abbildungen (4.3.1) und (4.3.2) unterscheiden sich nur durch die Abbildung $\tau(z) = -\bar{z}$. Diese erhält auch H^2 , denn es gilt

$$\tau(z) = -\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z), \text{ also } \operatorname{Im}(\tau(z)) = \operatorname{Im}(z) > 0.$$

Somit erhalten die Abbildungen (4.3.1) und (4.3.2) die obere Halbebene.

Man kann auch direkt nachweisen, daß sie Isometrien von H^2 sind: man weiß, daß eine in H^2 verlaufende Kurve $\alpha: [t_1, t_2] \rightarrow H^2$ die Länge

$$l(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\alpha}(t)|}{\operatorname{Im}(\alpha(t))} dt$$

besitzt. Nimmt man ein φ der Gestalt (4.3.1) oder (4.3.2), so hat $\varphi(\alpha)$ die Länge

$$l(\varphi(\alpha)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\varphi}(\alpha(t))|}{\operatorname{Im}(\varphi(\alpha(t)))} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\varphi'(\alpha)| |\dot{\alpha}(t)|}{\operatorname{Im}(\varphi(\alpha(t)))} dt$$

Nun gilt für $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc > 0$:

$$\varphi'(z) = \frac{acz+ad-acz-bc}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

$$|\varphi'(z)| = \frac{ad-bc}{\sqrt{(cz+d)^2(c\bar{z}+d)^2}} = \frac{ad-bc}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}$$

$$= \frac{ad-bc}{c^2|z|^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2}$$

$$\operatorname{Im}(\varphi(z)) = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{c^2|z|^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2} \quad \text{nach (4.3.3)}$$

Somit ist

$$\frac{|\varphi'(z)|}{\operatorname{Im}(\varphi(z))} = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)},$$

also $l(\alpha) = l(\varphi(\alpha))$. Die Abbildung $\tau(z) = -\bar{z}$ (das ist die Inversion an der imaginären Achse) ist auch eine Isometrie, denn wegen

$$\operatorname{Im}(\tau(z)) = \operatorname{Im}(z)$$

gilt

$$ds = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{1}{\operatorname{Im}(\tau(z))}.$$

Das Bogenelement ds wird also durch τ invariant gelassen und somit auch Bogenlängen.

Damit sind die Abbildungen (4.3.1) und (4.3.2) Isometrien von H^2 . Mit dem in 4.1 Gezeigten über Möbiustransformationen folgt u.a., daß sie Geraden auf Geraden abbilden.

4.4 Der hyperbolische Abstand

Satz 4.4.1: Der hyperbolische Abstand d von $z, w \in H^2$ ist gegeben durch

$$d(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}.$$

Beweis: Seien $z = ip$, $w = iq \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $\alpha: [t_1, t_2] \rightarrow H^2$, $\alpha(t) = x(t) + iy(t)$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\dot{y}(t) \neq 0$ für alle t , die ganz in H^2 verläuft, und die z und w verbindet, d.h. $\alpha(t_1) = z$, $\alpha(t_2) = w$. Dann hat sie nach 4.2 die Länge

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\alpha}(t)|}{\operatorname{Im}(\alpha(t))} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{y}(t)|}{y(t)} dt = |\ln(y(t_2)) - \ln(y(t_1))| = \left| \ln \frac{q}{p} \right| \end{aligned} \quad [1]$$

$l(\alpha)$ ist also immer größer oder gleich $\left| \ln \frac{q}{p} \right|$. Dieses Minimum wird erreicht, denn das Gleichheitszeichen gilt, wenn $x(t) = 0$ ist für alle t . Dies ist gleichbedeutend damit, daß α auf einer vertikalen Geraden oberhalb der reellen Achse liegt, also auf einer hyperbolischen Geraden in H^2 . Es ist also

$$d(ip, iq) = \left| \ln \frac{q}{p} \right|. \quad [1]$$

Nun gilt

$$\cosh(d(ip, iq)) = \frac{q}{2p} + \frac{p}{2q} = \frac{q^2 - 2pq + p^2}{2pq} + 1 = \frac{(q-p)^2}{2pq} + 1 = 1 + \frac{|iq - ip|^2}{2\operatorname{Im}(iq)\operatorname{Im}(ip)}$$

$$\cosh(d(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \quad \text{für obige } z, w. \quad (4.4.1)$$

Zeige nun die Invarianz von $\frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}$ unter $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc > 0$:

Nach (4.3.3) gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\varphi(z)) &= \frac{(ad - bc) \operatorname{Im}(z)}{c^2 |z|^2 + 2cd \operatorname{Re}(z) + d^2} \\ \operatorname{Im}(\varphi(w)) &= \frac{(ad - bc) \operatorname{Im}(w)}{c^2 |w|^2 + 2cd \operatorname{Re}(w) + d^2} \\ \varphi(z) - \varphi(w) &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} = \frac{acwz + bcw + adz + bd - acwz - adw - bcz - bd}{c^2wz + cdw + cdz + d^2} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - w)}{c^2wz + cd(w + z) + d^2}\end{aligned}\quad (4.4.2)$$

Rechnung liefert

$$|\varphi(z) - \varphi(w)|^2 = \frac{(ad - bc)^2 |z - w|^2}{(c^2 |z|^2 + 2cd \operatorname{Re}(z) + d^2)(c^2 |w|^2 + 2cd \operatorname{Re}(w) + d^2)} \quad \text{und somit}$$

$$\frac{|\varphi(z) - \varphi(w)|^2}{\operatorname{Im}(\varphi(z)) \operatorname{Im}(\varphi(w))} = \frac{(ad - bc)^2 |z - w|^2}{(ad - bc)^2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)} = \frac{|z - w|^2}{\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}$$

Leicht nachzurechnen ist auch die Invarianz unter $\tau(z) = -\bar{z}$ und somit unter den Isometrien (4.3.1) und (4.3.2).

Man erkennt, daß beide Seiten von (4.4.1) invariant sind unter (4.3.1) und (4.3.2), die Gleichung gilt also für beliebige $z, w \in H^2$.

Weitere Abstandsbeziehungen bekommt man durch Umformungen [1]:

$$\begin{aligned}\cosh(d(z, w)) &= 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)} = 2 \cosh^2\left(\frac{1}{2} d(z, w)\right) - 1 \\ \cosh^2\left(\frac{1}{2} d(z, w)\right) &= 1 + \frac{|z - w|^2}{4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)} = \frac{4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w) + |z - w|^2}{4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}\end{aligned}$$

Zeige nun die Identität $4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w) + |z - w|^2 = |z - \bar{w}|^2$:

$$\begin{aligned}|z - \bar{w}|^2 &= |z|^2 - wz - \bar{w}\bar{z} + |w|^2 \\ 4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w) + |z - w|^2 &= 4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w) + |z|^2 - wz - \bar{w}\bar{z} + |w|^2\end{aligned}$$

Also ist z. z.: $w\bar{z} + \bar{w}z - 4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w) = wz + \bar{w}\bar{z}$. Sei $z = x + iy$, $w = u + iv$.

$$\begin{aligned}(u + iv)(x - iy) + (u - iv)(x + iy) - 4vy &= ux + vy + ivx - iuy + ux + vy - ivx + iuy - 4vy \\ &= ux - vy + ivx + iuy + ux - vy - ivx - iuy \\ &= (u + iv)(x + iy) + (u - iv)(x - iy)\end{aligned}$$

Also gilt

$$\cosh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}.$$

Aus der Beziehung

$$\cosh(d(z, w)) = 2 \sinh^2\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) + 1$$

folgt

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}$$

und somit

$$\tanh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \left|\frac{z - w}{z - \bar{w}}\right|$$

$$\frac{1}{2}d(z, w) = \operatorname{artanh} \left|\frac{z - w}{z - \bar{w}}\right|$$

$$d(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}. \quad \square$$

Eine weitere Formel für den Abstand erhält man durch das Doppelverhältnis [1]:

Definition 4.4.2: Seien z_1, z_2, z_3, z_4 vier paarweise verschiedene Punkte in C . Das Doppelverhältnis dieser vier Punkte ist gegeben durch

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}.$$

Man kann dies erweitern auf $C \cup \{\infty\}$. Dann gilt (zum Beispiel)

$$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2)}.$$

Satz 4.4.3: Das Doppelverhältnis ist invariant unter Möbiustransformationen.

Beweis: Wenn

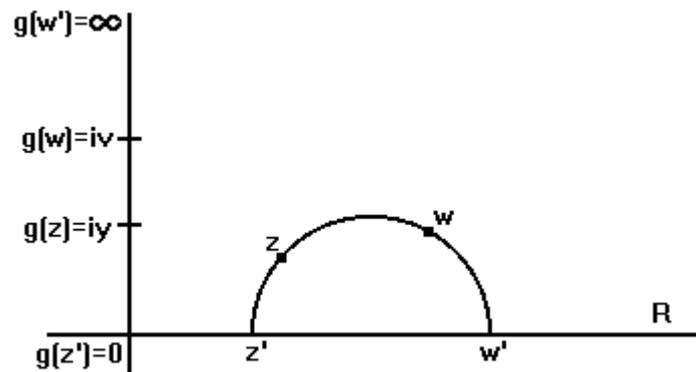
$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

so ist nach (4.4.2)

$$g(z) - g(w) = \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)}.$$

Durch Einsetzen sieht man leicht, daß $[g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ gilt. \square

Nimmt man nun zwei voneinander verschiedene Punkte z, w in H^2 , so existiert eine eindeutige hyperbolische Gerade L , die durch z und w verläuft. L trifft die reelle Achse in z' und w' .



Satz 4.4.4: Es gilt

$$d(z, w) = \ln[z', z, w, w'].$$

Beweis [1]: Es existiert eine Möbiustransformation g , die L auf die imaginäre Achse abbildet, mit $g(z') = 0$, $g(z) = iy$, $g(w) = iv$, $g(w') = \infty$. Man findet g wie folgt:

Es muß gelten: $g(w') = \infty$. Ansatz: $g(z) = -\frac{1}{z - w'} + c$

Weiter muß gelten: $g(z') = 0$, also $c = \frac{1}{z' - w'}$.

$$g(z) = -\frac{1}{z - w'} + \frac{1}{z' - w'} = \frac{-z' + w' + z - w'}{(z - w')(z' - w')} = \frac{z - z'}{(z' - w')z - (z' - w')w'}.$$

Dies ist offensichtlich eine Möbiustransformation der Gestalt $\frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$, also eine Isometrie von H^2 .

Nun gilt

$$\begin{aligned} d(z, w) &= d(g(z), g(w)) = \ln\left(\frac{v}{y}\right) = \ln[0, iy, iv, \infty] = \ln[g^{-1}(0), g^{-1}(iy), g^{-1}(iv), g^{-1}(\infty)] \\ &= \ln[z', z, w, w'] \quad \square \end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt auch für das Einheitskreisscheibenmodell E , wobei z' und w' dann auf dem Rand von E liegen; denn man kann ja bekanntlich H^2 isometrisch auf E abbilden, und dadurch wird das Doppelverhältnis invariant gelassen.



Abschließend ist noch die Frage offen, ob es außer den Abbildungen (4.3.1) und (4.3.2) noch weitere Isometrien von H^2 gibt. Ein ähnliches Argument wie beim Einheitskreisscheibenmodell E zeigt auch hier:

Satz 4.4.5: *Außer den Abbildungen (4.3.1) und (4.3.2) gibt es keine weiteren Isometrien von H^2 .*

Beweis [1]: Sei φ eine beliebige Isometrie von H^2 . Dann kann man eine Isometrie g der Form (4.3.1) oder (4.3.2) finden, so daß

$$g(\varphi(i)) = i, \quad g(\varphi(I_1)) = I_1, \quad g(\varphi(I_2)) = I_2,$$

wobei

$$I_1 := \{ir \in \mathbb{C}; r > 1\} \quad \text{und} \quad I_2 := \{ir \in \mathbb{C}; 0 < r < 1\}$$

Aus der Abstandsbeziehung

$$d(i, it) = d(g\varphi(i), g\varphi(it)) = d(i, g\varphi(it)) \quad \text{für } t > 0$$

kann man nun ablesen, daß die imaginäre Achse durch $g\varphi$ unverändert bleibt.

Seien nun $z = x + iy$, $g\varphi(z) = w = u + iv$, $t > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(it, z) &= d(g\varphi(it), g\varphi(z)) = d(it, w) \\ \frac{|it - z|^2}{\operatorname{Im}(it)\operatorname{Im}(z)} &= \frac{|it - w|^2}{\operatorname{Im}(it)\operatorname{Im}(w)} \\ \frac{x^2 + (t - y)^2}{ty} &= \frac{u^2 + (t - v)^2}{tv} \end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung folgt $x^2 = u^2$, $y = v$ und somit $w = g(\varphi(z)) = z$ oder $-\bar{z}$. Damit ist

$$\varphi(z) = g^{-1}(z) \quad \text{oder} \quad g^{-1}(-\bar{z})$$

Die Abbildungen g der Form (4.3.1), (4.3.2) bilden eine Untergruppe der Möbiusgruppe, d.h. die Abbildungen g^{-1} sind auch von dieser Form.

Man erkennt nun, daß φ , also eine beliebige Isometrie von H^2 , auch von der Form (4.3.1) oder (4.3.2) ist.

§ 5 Geometrische Betrachtungen, Konstruktionen

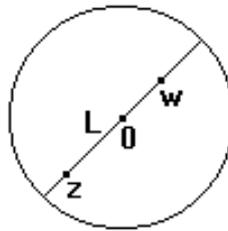
Im folgenden werden wir uns in den beiden Modellen E und H^2 damit beschäftigen, geometrische Probleme zeichnerisch zu lösen. Dabei geht es um das Finden der hyperbolischen Geraden durch zwei gegebene Punkte und um Bestimmung der Mittelsenkrechten zwischen zwei gegebenen Punkten.

5.1 Die Gerade durch zwei gegebene Punkte

Gegeben seien zwei verschiedene Punkte z und w . Wie findet man nun die hyperbolische Gerade L durch diese beiden Punkte?

Modell E :

I) $0, z, w$ liegen auf einer euklidischen Geraden. Dann ist die hyperbolische Gerade L der Teil der euklidischen Geraden, der in E verläuft, also ein Durchmesser.



II) $0, z, w$ liegen nicht auf einer euklidischen Geraden. Dann weiß man, daß L ein Kreisbogen ist, der in E liegt und den Rand von E senkrecht schneidet.

Der Kreisbogen sei ein Teil des Kreises $S(a, r) = \{z \in C; |z - a| = r\}$. Damit $S(a, r)$ und S^1 senkrecht aufeinander stehen, muß gelten: $|a|^2 = 1 + r^2$.

Satz 5.1.1: *Genau dann, wenn für alle $z^* \in S(a, r)$ auch $1/\bar{z}^* \in S(a, r)$ gilt, stehen S^1 und $S(a, r)$ senkrecht aufeinander.*

Beweis: Es gilt

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$$

$$|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2 - r^2 = 0$$

Einsetzen von z^* liefert

$$|z^*|^2 - a\bar{z}^* - \bar{a}z^* + |a|^2 - r^2 = 0. \quad (5.1.1)$$

Einsetzen von $w = 1/\bar{z}^*$ liefert

$$\frac{1}{|z^*|^2} - a \frac{1}{z^*} - \bar{a} \frac{1}{\bar{z}^*} + |a|^2 - r^2 = 0 \quad |\cdot |z^*|^2$$

$$1 - a \bar{z}^* - \bar{a} z^* + |z^*|^2 (|a|^2 - r^2) = 0 \tag{5.1.2}$$

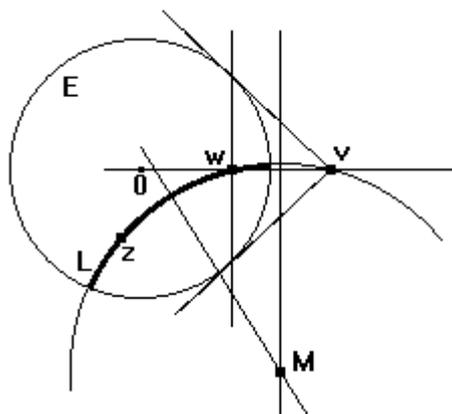
Die Gleichungen (5.1.1) und (5.1.2) sind genau dann äquivalent, wenn gilt

$$|a|^2 - r^2 = 1,$$

d.h. wenn S^1 und $S(a,r)$ senkrecht aufeinander stehen. □

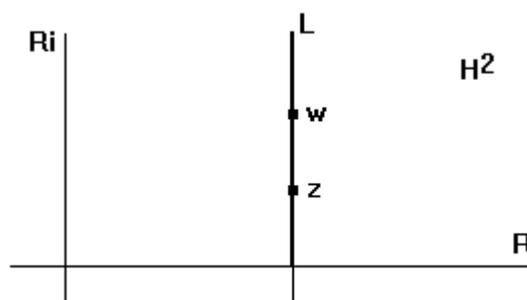
Das heißt nun also, daß mit jedem Punkt z auf $S(a,r)$ auch der Punkt $1/\bar{z}$ auf $S(a,r)$ liegt. Dieser Punkt ist aber gerade der Bildpunkt von z unter Inversion an S^1 .

Somit findet man zu $z, w \in E$ die Gerade L durch beide Punkte wie folgt: man nimmt einen der beiden Punkte, z.B. w , und konstruiert den Bildpunkt v von w unter Inversion an S^1 . Dann hat man drei Punkte (z, w und v), die auf dem Kreis liegen, auf dem L verläuft. Den Mittelpunkt M dieses Kreises bekommt man leicht, indem man die Mittelsenkrechten z.B. der euklidischen Strecken \overline{zw} und \overline{wv} schneidet. L ist dann gerade der Teil des Kreises, der in E verläuft.

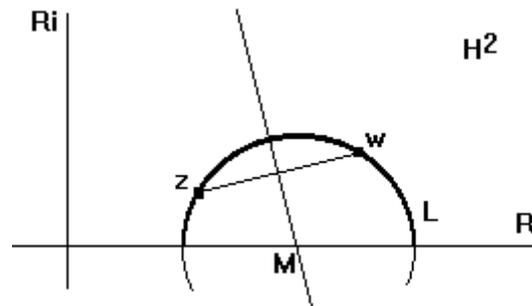


Modell H^2 :

I) z und w haben den gleichen Realteil ($\text{Re}(z) = \text{Re}(w)$). Dann ist L der Teil der euklidischen Geraden durch z und w , der oberhalb der reellen Achse verläuft.



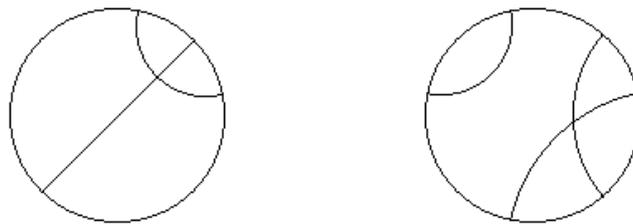
II) $\operatorname{Re}(z) \neq \operatorname{Re}(w)$: dann ist L der Halbkreis durch z und w , dessen Mittelpunkt M auf der reellen Achse liegt. Diesen findet man, indem man die Mittelsenkrechte der euklidischen Strecke \overline{zw} mit der reellen Achse schneidet.



Offensichtlich ist es wie in der euklidischen Geometrie so, daß durch zwei gegebene Punkte z und w genau eine hyperbolische Gerade L verläuft, d.h. L ist eindeutig bestimmt.

Man sieht auch, daß sich, wie in der euklidischen Geometrie, zwei Geraden in höchstens einem Punkt schneiden können:

E :



H^2 :



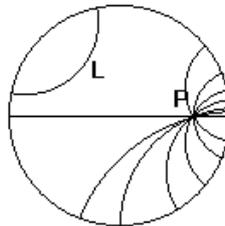
Der große Unterschied zwischen der euklidischen und der hyperbolischen Geometrie ist jedoch der, daß das Parallelenaxiom verletzt ist:

In der euklidischen Geometrie gibt es zu einer Geraden L und einem Punkt $P \notin L$ genau eine Gerade L' , $P \in L'$, mit $L \parallel L'$.

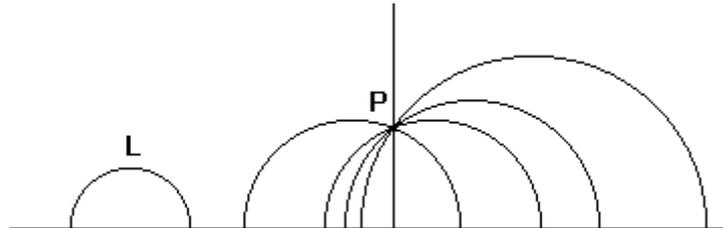
Dabei ist die Parallelität folgendermaßen definiert: zwei Geraden L, L' sind genau dann parallel, wenn $L = L'$ oder $L \cap L' = \emptyset$.

In der hyperbolischen Geometrie gibt es dagegen zu einer gegebenen Geraden L und einem Punkt $P \notin L$ unendlich viele zu L parallele Geraden durch den Punkt P :

E :



H^2 :



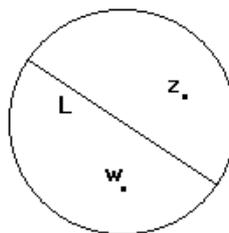
5.2 Die Mittelsenkrechte zweier Punkte

Interessant ist auch die Frage, wie man zu zwei Punkten z und w die hyperbolische Gerade L finden kann, so daß die Inversion von z an L genau der Punkt w ist und umgekehrt (also das Finden der Mittelsenkrechten zu z, w).

Modell E :

Im folgenden sei φ die Inversion an L , ψ die Inversion an S^1 .

I) Wenn $|z| = |w|$, dann bildet man die Mittelsenkrechte der euklidischen Strecke \overline{zw} . Da diese durch den Nullpunkt geht, ist L gerade der Teil der Mittelsenkrechten, der in E verläuft.



II) Wenn $|z| \neq |w|$, so gilt zu unterscheiden:

a) z und w liegen nicht auf einem Durchmesser:

Man weiß, daß L und S^1 senkrecht aufeinander stehen müssen. L sei der Teil des euklidischen Kreis $S(a, r)$ mit $S^1 \perp S(a, r)$, der in E verläuft. Nun gilt es, $S(a, r)$ zu finden.

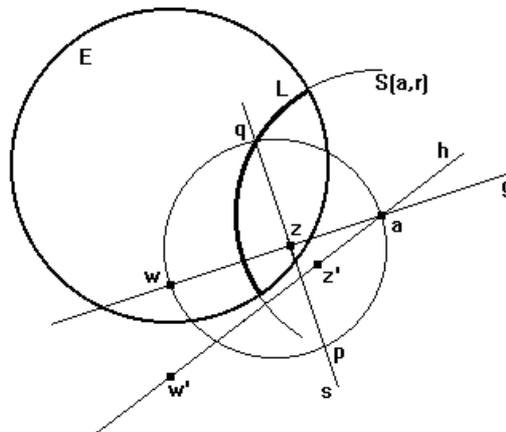
Nach dem Satz in 3.3 weiß man, daß wegen $S^1 \perp S(a, r)$

$$\psi(S(a, r)) = S(a, r)$$

gilt. Nun soll z durch φ auf w abgebildet werden und umgekehrt. d.h. z und w sollen inverse Punkte bezüglich $S(a,r)$ sein. Nach dem Hilfssatz in 3.3 müssen dann auch $\psi(z) =:z'$ und $\psi(w) =:w'$ inverse Punkte bezüglich $\psi(S(a,r)) = S(a,r)$ sein.

Es gilt also, daß sowohl z als auch z' durch φ auf w bzw. w' abgebildet werden und umgekehrt. Man findet nun den Mittelpunkt a von $S(a,r)$ wie folgt: man konstruiert z' und w' als Bildpunkte von z und w unter Inversion an S^1 . g sei die euklidische Gerade durch z und w , h die euklidische Gerade durch z' und w' . Der Mittelpunkt a muß nun sowohl auf g als auch auf h liegen. Weil z und w nicht auf einem Durchmesser liegen, sind g und h nicht parallel und es existiert ein eindeutiger Schnittpunkt, der Mittelpunkt a .

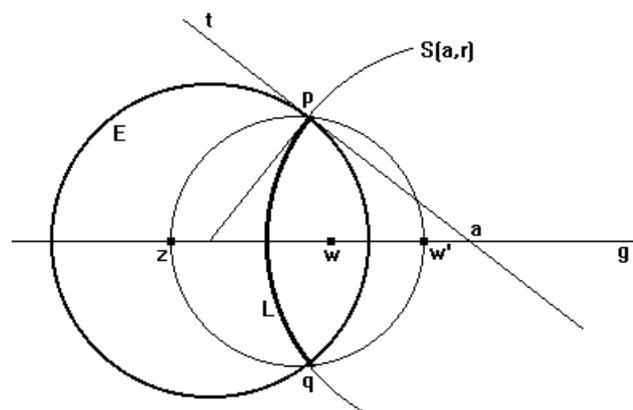
Den Radius r findet man folgendermaßen: sei ohne Einschränkung $|z - a| < |w - a|$ (ansonsten Umbenennung). Man zieht durch z die Senkrechte s zu g , schneidet s mit dem Thaleskreis über \overline{aw} und erhält zwei Schnittpunkte p und q . Dann ist $r = |p - a| = |q - a|$.



b) z und w liegen auf einem Durchmesser:

g sei die euklidische Gerade durch z und w . Wieder ist $S(a,r)$ zu finden. Dazu geht man folgendermaßen vor: man bildet einen Punkt $\neq 0$, z.B. w , unter ψ (also Inversion an S^1) ab, erhält somit den Punkt w' . Dann zieht man den Thaleskreis über $\overline{zw'}$. Dieser schneidet S^1 in den Punkten p und q . Nun zieht man durch einen der beiden Punkte, z.B. p , die Tangente t an S^1 . Diese schneidet die Gerade g im Punkt a , dem Mittelpunkt von $S(a,r)$.

Der Radius r ist gegeben durch $r = |p - a| = |q - a|$.



Daß diese Vorgehensweise funktioniert, ist noch zu beweisen:

Beweis: Daß $S^1 \perp S(a, r)$ gilt, ist nach Konstruktion gegeben. Also ist zu zeigen, daß w tatsächlich unter Inversion an L auf z abgebildet wird. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei g , also die Gerade durch z und w , gleich der reellen Achse (ansonsten erreicht man dies durch eine Drehung um 0). Dann ist $w' = 1/w$.

Schnittpunkt von S^1 mit dem Thaleskreis über \overline{zw} :

$$\begin{aligned} S^1: & \quad |x|^2 = 1 \quad x \in C \\ \text{Thaleskreis:} & \quad \left| x - \frac{1/w + z}{2} \right|^2 = \left(\frac{1/w - z}{2} \right)^2 \\ & \quad |x|^2 - \frac{x + \bar{x}}{2} \left(\frac{1}{w} + z \right) + \frac{1/w^2 + z^2}{4} + \frac{z}{2w} = \frac{1/w^2 + z^2}{4} - \frac{z}{2w} \\ & \quad |x|^2 - \operatorname{Re}(x) \left(\frac{1}{w} + z \right) = -\frac{z}{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Schnitt:} & \quad \operatorname{Re}(x) \left(\frac{1}{w} + z \right) = 1 + \frac{z}{w} \\ & \quad \operatorname{Re}(x) \left(\frac{1 + zw}{w} \right) = \frac{w + z}{w} \\ & \quad \operatorname{Re}(x) = \frac{w + z}{1 + zw} \end{aligned}$$

Dies ist nun der Realteil von p und q . a ist gerade der Bildpunkt des Punktes $\frac{w + z}{1 + zw}$ unter

Inversion an S^1 (nach Konstruktion) $\Rightarrow a = \frac{1 + zw}{w + z}$. Bildet man nun w durch Inversion an $S(a, r)$ ab, so ergibt sich

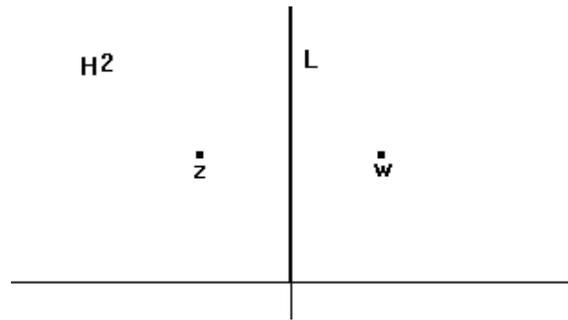
$$\begin{aligned} \varphi(w) &= a + \frac{r^2}{\bar{w} - \bar{a}} = a + \frac{r^2}{w - a} = \frac{aw - a^2 + r^2}{w - a} = \frac{aw - 1}{w - a} = \frac{(1 + zw)w - w - z}{w(w + z) - 1 - zw} \\ &= \frac{w + zw^2 - w - z}{w^2 + zw - 1 - zw} = \frac{z(w^2 - 1)}{w^2 - 1} = z \end{aligned}$$

z ist also tatsächlich der Bildpunkt von w unter Inversion an L .

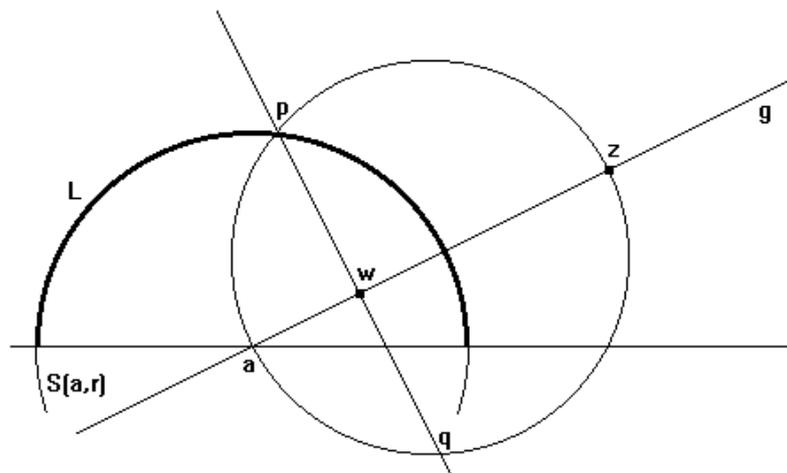
Modell H^2 :

Hier ist zu unterscheiden:

I) $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)$: man zieht die Mittelsenkrechte der euklidischen Strecke \overline{zw} . Dann ist L der Teil der Mittelsenkrechten, der oberhalb der reellen Achse verläuft.



II) $\text{Im}(z) \neq \text{Im}(w)$: wieder ist $S(a, r)$ zu finden mit $L \subset S(a, r)$. Man weiß, daß a auf der reellen Achse liegen muß. Sei ohne Einschränkung $\text{Im}(w) < \text{Im}(z)$, ansonsten Umbenennung. g sei die euklidische Gerade durch z und w . Sie schneidet die reelle Achse im Punkt a . Dann zieht man durch w die Gerade h senkrecht zu g . Der Thaleskreis über die euklidische Strecke \overline{az} schneidet h in den beiden Punkten p und q . Der Radius r ist dann gegeben durch $r = |p - a| = |q - a|$.

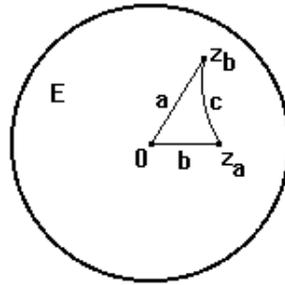


5.3 Der Seitencosinussatz aus den ebenen Modellen der hyperbolischen Geometrie

Definition 5.3.1: In den Modellen E und H^2 wird (analog zum § 2) ein hyperbolisches Dreieck als Tripel von Punkten $(z_a, z_b, z_c) \in E \times E \times E$ bzw. $H^2 \times H^2 \times H^2$, die nicht auf einer hyperbolischen Geraden liegen, definiert. Dabei ist es auch erlaubt, unendlich ferne Punkte (also Punkte auf S^1 im Modell E , oder Punkte auf $R \cup \{\infty\}$ in H^2) mit zu berücksichtigen. Die Winkelmessung ist wie im R^2 .

Satz 5.3.2: Es gelten die Sätze 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5.

Beweis [1]: Zum Beweis wähle nun das Modell E und das spezielle Dreieck $(0, z_a, z_b)$ mit $z_a \in R, z_a > 0$.



Es gilt

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= 2 \sinh^2\left(\frac{1}{2}c\right) + 1 = 2 \sinh^2\left(\frac{1}{2}d(z_a, z_b)\right) + 1 \\ &= \frac{2|z_a - z_b|^2}{(1 - |z_a|^2)(1 - |z_b|^2)} + 1 \quad \text{nach (3.4.1)} \end{aligned}$$

Der Winkel beim Punkt 0 sei γ . Der Cosinussatz der euklidischen Geometrie liefert

$$|z_a - z_b|^2 = |z_a|^2 + |z_b|^2 - 2|z_a||z_b|\cos(\gamma)$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= \frac{2|z_a|^2 + 2|z_b|^2 - 4|z_a||z_b|\cos(\gamma) + 1 - |z_a|^2 - |z_b|^2 + |z_a|^2|z_b|^2}{(1 - |z_a|^2)(1 - |z_b|^2)} \\ &= \frac{(1 + |z_a|^2)(1 + |z_b|^2) - 4|z_a||z_b|\cos(\gamma)}{(1 - |z_a|^2)(1 - |z_b|^2)} \end{aligned}$$

Nach (3.4.2) ist

$$\begin{aligned} z_a = |z_a| &= \tanh\left(\frac{1}{2}d(0, z_a)\right) = \tanh(b/2) \\ z_b = e^{i\gamma} \tanh\left(\frac{1}{2}d(0, z_b)\right) &= e^{i\gamma} \tanh\left(\frac{1}{2}a\right) \Rightarrow |z_b| = \tanh(a/2) \end{aligned}$$

und mit (1.3.5) und (1.3.6) gilt

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= \frac{\frac{\cosh(b)}{\cosh^2(b/2)} \cdot \frac{\cosh(a)}{\cosh^2(a/2)} - 4 \frac{\sinh(b/2)}{\cosh(b/2)} \cdot \frac{\sinh(a/2)}{\cosh(a/2)} \cos(\gamma)}{\frac{1}{\cosh^2(b/2)} \cdot \frac{1}{\cosh^2(a/2)}} \\ &= \cosh(b) \cosh(a) - 4 \sinh(b/2) \cosh(b/2) \sinh(a/2) \cosh(a/2) \cos(\gamma). \end{aligned}$$

Die Beziehung (1.3.4) liefert nun

$$\cosh(c) = \cosh(b) \cosh(a) - 2 \sinh(b) \sinh(a) \cos(\gamma),$$

also, wie in § 2, den Cosinussatz der hyperbolischen Geometrie. \square

Aus diesem folgen nun wieder der Sinussatz und der Winkelcosinussatz der hyperbolischen Geometrie wie in § 2:

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$$

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cosh(c)$$

Der Winkelcosinussatz besagt insbesondere, daß zwei Dreiecke, die gleiche Winkel besitzen, auch in den Seitenlängen übereinstimmen. Dies heißt, daß es eine Isometrie gibt, die das eine Dreieck auf das andere abbildet. Hieraus folgt nun die Allgemeinheit der oben hergeleiteten Sätze, denn man kann das gewählte Dreieck beliebig durch eine Isometrie abbilden, ohne dabei die Seitenlängen und somit die Winkel zu verändern.

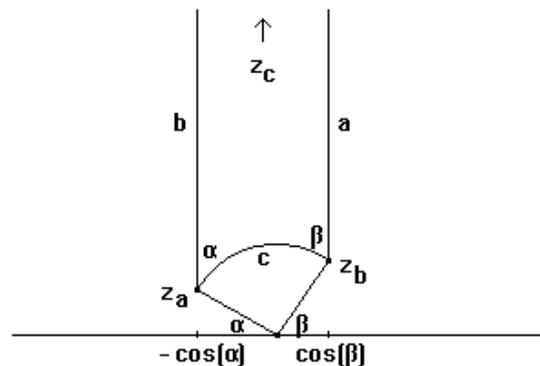
5.4 Der Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreiecks

Satz 5.4.1: *Der Flächeninhalt F eines hyperbolischen Dreiecks mit den Eckenwinkeln α, β, γ beträgt*

$$F = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Insbesondere erkennt man wieder, daß die Winkelsumme in einem hyperbolischen Dreieck $< \pi$ ist.

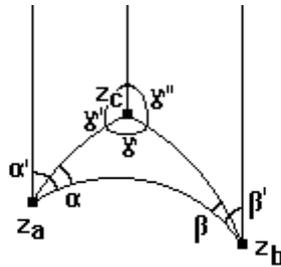
Beweis [1]: Wähle das Modell H^2 und betrachte zuerst das Dreieck $\Delta := (z_a, z_b, z_c)$ mit $z_c = \infty$. Man kann den Spezialfall annehmen, daß z_a und z_b auf dem Kreisbogen $|z|=1$, $\text{Im}(z) > 0$, liegen.



Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks Δ gegeben durch (reelle Betrachtung: $x = (x_1, x_2)$):

$$\begin{aligned} F &= \iint_{\Delta} ds^2 = \iint_{\Delta} \frac{1}{x_2^2} dx_2 dx_1 = \int_{-\cos(\alpha)}^{\cos(\beta)} \int_{\sqrt{1-x_1^2}}^{\infty} \frac{1}{x_2^2} dx_2 dx_1 = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos(\beta)} \left[-\frac{1}{x_2} \right]_{\sqrt{1-x_1^2}}^{\infty} dx_1 = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos(\beta)} \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 \\ &= [\arcsin(x)]_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos(\beta)} = [\arcsin(x)]_{\sin(-\pi/2+\alpha)}^{\sin(\pi/2-\beta)} = \frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha \\ &= \pi - (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Sei nun $\Delta = (z_a, z_b, z_c)$, z_a, z_b, z_c alle $\neq \infty$, die Winkel bei z_a, z_b, z_c seien α, β, γ .



Das Dreieck $\Delta = (z_a, z_b, z_c)$ ist (s. Zeichnung) die Differenz der Dreiecke $\Delta_1 = (z_a, z_b, \infty)$, $\Delta_2 = (z_a, z_c, \infty)$ und $\Delta_3 = (z_b, z_c, \infty)$. Also gilt für den Flächeninhalt F von Δ :

$$F = F_1 - F_2 - F_3.$$

Dabei ist

$$F_1 = \pi - (\alpha' + \beta')$$

$$F_2 = \pi - ((\alpha' - \alpha) + \gamma')$$

$$F_3 = \pi - (\gamma'' + (\beta' - \beta))$$

Also gilt

$$F = \pi - \alpha' - \beta' - \pi + \alpha' - \alpha + \gamma' - \pi + \gamma'' + \beta' - \beta$$

$$= -\pi + \gamma' + \gamma'' - \alpha - \beta$$

$$= -\pi + 2\pi - \gamma - \alpha - \beta$$

$$F = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \quad \square$$

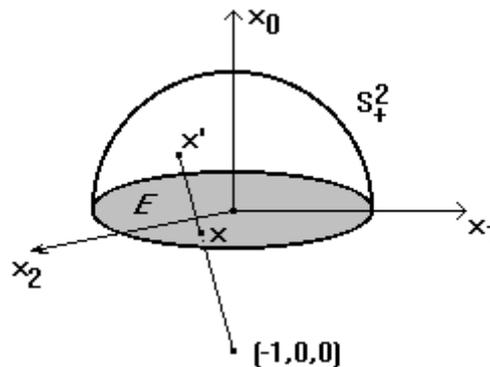
Dies gilt für jedes beliebige hyperbolische Dreieck, denn man kann das gewählte Dreieck beliebig durch eine Isometrie abbilden, ohne dabei Seitenlängen und Winkel zu verändern. Außerdem gilt diese Beziehung auch für E , da die Abbildung von E nach H^2 bekannterweise konform ist.

§ 6 Das Hemisphärenmodell

Als weiteres Modell der hyperbolischen Geometrie, das sich jedoch nicht als besonders vorteilhaft herausstellt, dient dieses Modell. Der Nachteil besteht darin, daß es sich wieder, wie bei H^+ , um ein Gebilde aus dem R^3 handelt, und zwar der Hemisphäre

$$S_+^2 := \{(x_0, x_1, x_2) \in R^3; x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1, x_0 > 0\} \subset R^3.$$

Man erhält dieses Modell, indem man das Modell $E = \{(0, x_1, x_2) \in R^3; x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset R^3$ stereographisch von $(-1, 0, 0)$ aus projiziert, und damit die Strukturen von E auf S_+^2 überträgt.



Nimmt man einen Punkt $x = (0, x_1, x_2) \in E$, so erhält man den Bildpunkt $x' = \varphi(x) \in S_+^2$ wie folgt:

$$\varphi(x) = (-1, 0, 0) + \lambda((0, x_1, x_2) - (-1, 0, 0)) = (\lambda - 1, \lambda x_1, \lambda x_2) = x'$$

Dabei ist λ so zu wählen, daß $|x'| = 1$ ist:

$$(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 = 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \lambda^2 |x|^2 = 1$$

$$\lambda^2 (1 + |x|^2) - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ bzw. } \lambda = \frac{2}{1 + |x|^2}$$

$\lambda = 0$ ist auszuschließen. Damit ist die Abbildung gegeben durch

$$\varphi: E \rightarrow S_+^2$$

$$x = (0, x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2}, \frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \frac{2x_2}{1 + |x|^2} \right) = x'$$

Erweitert man den Definitionsbereich auf $E \cup S^1$ und den Wertebereich auf $S_+^2 \cup S^1$, so erkennt man, dass

$$\varphi(x) = x$$

gilt für $x \in S^1$, die unendlich fernen Punkte bleiben also fix.

Die Abbildung φ ist eine Bijektion, denn es existiert eine Umkehrabbildung:

$$\psi: S_+^2 \rightarrow E$$

$$x' = (x_0, x_1, x_2) \mapsto \left(0, \frac{x_1}{1+x_0}, \frac{x_2}{1+x_0} \right) = x$$

Es ist

$$|x|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1+x_0)^2} = \frac{1-x_0^2}{(1+x_0)^2} = \frac{1-x_0}{1+x_0} < 1 \text{ für } x' \in S_+^2,$$

somit ist ψ tatsächlich eine Abbildung von S_+^2 nach E .

6.1 Die hyperbolischen Geraden im Hemisphärenmodell

Definition 6.1.1: Die *hyperbolischen Geraden* in S_+^2 sind die nichtleeren und mehr als einen Punkt enthaltenden Schnitte von S_+^2 mit Ebenen senkrecht zur x_1, x_2 -Ebene.

Satz 6.1.2: Die Abbildung $\varphi: E \rightarrow S_+^2$ bildet Geraden von E auf Geraden von S_+^2 ab.

Beweis: Die Geraden von E sind bekanntlich Kreisbögen, die ganz in E liegen und die den Rand von E senkrecht schneiden, oder Durchmesser von E . Diese Kreisbögen sind Teilmengen von Kreisen der Gestalt

$$S(a, r) = \{x = (0, x_1, x_2) \in R^3; |x - a| = r\} \subset R^3, a = (0, a_1, a_2) \in R^3, r \in R, |a|^2 - r^2 = 1.$$

Betrachte nun einen solchen Kreis S . Weil die ganze Anordnung rotationssymmetrisch um die x_0 -Achse ist, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß a auf der x_1 -Achse liegt, also $a = (0, a_1, 0) \in R^3$. S hat nun die Darstellung

$$\begin{aligned} (x_1 - a_1)^2 + x_2^2 &= r^2 \\ x_1^2 - 2a_1x_1 + a_1^2 + x_2^2 &= r^2 && \text{und wegen } |a|^2 - r^2 = a_1^2 - r^2 = 1 \\ x_1^2 - 2a_1x_1 + x_2^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Parametrisierung des Kreises:

$$x_1 = t \Rightarrow x_2^2 = 2a_1t - t^2 - 1 = -(t^2 - 2a_1t + 1)$$

Es ist $t^2 - 2a_1t + 1 = (t - a_1 - \sqrt{a_1^2 - 1})(t - a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1})$. Dies ist genau dann ≤ 0 , wenn

$$t \leq a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1} \text{ und } t \geq a_1 - \sqrt{a_1^2 - 1}, \text{ d.h. wenn } t \in \left[a_1 - \sqrt{a_1^2 - 1}, a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1} \right] =: I.$$

Dann ist $x_2 = \pm \sqrt{2a_1 t - t^2 - 1}$, und S wird parametrisiert durch

$$S = \left\{ (t, \pm \sqrt{2a_1 t - t^2 - 1}); t \in I \right\}.$$

Die hyperbolische Gerade L besteht aus allen Punkten $x = (x_1, x_2)$ mit $|x|^2 < 1$, also

$$t^2 + 2a_1 t - t^2 - 1 < 1$$

$$t < \frac{1}{a_1}$$

L würde also parametrisiert durch

$$L = \left\{ (t, \pm \sqrt{2a_1 t - t^2 - 1}); t \in I \text{ und } t < 1/a_1 \right\}.$$

t kann aber nur in I liegen und zugleich $< 1/a_1$ sein, wenn $1/a_1 > a_1 - \sqrt{a_1^2 - 1}$ (untere Grenze von I) ist. Dies ist gegeben wegen $|a| = |a_1| > 1$:

$$1/|a_1| < 1$$

$$1/a_1^2 < 1$$

$$a_1^2 - 2 + 1/a_1^2 < a_1^2 - 1$$

$$|a_1 - 1/a_1| < \sqrt{a_1^2 - 1}$$

$$-\sqrt{a_1^2 - 1} < a_1 - 1/a_1 < \sqrt{a_1^2 - 1} \quad \text{d.h.}$$

$$1/a_1 < a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1}, \quad 1/a_1 > a_1 - \sqrt{a_1^2 - 1}$$

Da jede Zeile aus der vorherigen durch Äquivalenzumformungen hervorgeht, sieht man schön: genau dann, wenn der Mittelpunkt a von S außerhalb von $E \cup S^1$ liegt ($|a| > 1$), existiert eine hyperbolische Gerade L , die parametrisierbar ist, denn genau dann ist möglich, daß $t \in I$, und zugleich $t < 1/a_1$ ist.

Definiere nun das neue Intervall $J := \left[a_1 - \sqrt{a_1^2 - 1}, 1/a_1 \right]$. Somit ist

$$L = \left\{ (t, \pm \sqrt{2a_1 t - t^2 - 1}); t \in J \right\}.$$

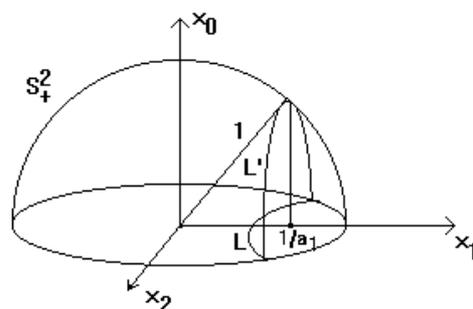
Bildet man L unter φ ab, erhält man

$$\left(t, \pm \sqrt{2a_1 t - t^2 - 1} \right) \xrightarrow{\varphi} \left(\frac{1 - a_1 t}{a_1 t}, \frac{1}{a_1}, \frac{\pm \sqrt{2a_1 t - t^2 - 1}}{a_1 t} \right) \quad \text{und somit}$$

$$L' = \varphi(L) = \left\{ \left(\frac{1 - a_1 t}{a_1 t}, \frac{1}{a_1}, \frac{\pm \sqrt{2a_1 t - t^2 - 1}}{a_1 t} \right); t \in J \right\}$$

Es ist tatsächlich $L' \in S_+^2$, denn es gilt $t < 1/a_1 \Leftrightarrow \frac{1 - a_1 t}{a_1 t} > 0$.

Man erkennt, daß die zweite Komponente von L' gleich $1/a_1 = \text{const}$ ist, somit liegt L' in der Ebene $x_1 = 1/a_1$. Diese schneidet die x_1, x_2 -Ebene genau in der Polaren zum Punkt a bzgl. S^1 . L' ist also der Schnitt der Ebene $x_1 = 1/a_1$ mit S_+^2 . Dies ist ein Halbkreis mit Radius $\sqrt{1 - 1/a_1^2}$ und Mittelpunkt $(0, 1/a_1, 0)$ parallel zur x_0, x_2 -Ebene.



Weil $\varphi(S^1) = S^1$, haben L und L' die gleichen Anfangspunkte.

Betrachtet man den Grenzfall $a_1 \rightarrow \infty$, also $1/a_1 \rightarrow 0$, so erhält man für L einen Durchmesser von E als hyperbolische Gerade. Man erkennt, daß L' dann in der Ebene $x_1 = 0$ liegt, L' also der Schnitt von S_+^2 mit dieser Ebene ist. Dies ist auch anschaulich klar.

Aus der Rotationssymmetrie um die x_0 -Achse folgt nun die Behauptung. □

6.2 Die Metrik

Satz 6.2.1: *Damit φ eine Isometrie von E nach S_+^2 ist, muß für das Bogenlängelement ds in E , mit dem man die Metrik in E erzeugt, gelten:*

$$ds = \frac{|dx|}{x_0}$$

Beweis: Sei $\psi = \varphi^{-1}$. Damit φ eine Isometrie von E nach S_+^2 ist, muß gelten:

$$d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)), \quad x, y \in E, \varphi(x), \varphi(y) \in S_+^2, \quad \text{oder äquivalent dazu}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) = d(x, y), \quad \psi(x), \psi(y) \in E, \quad x, y \in S_+^2.$$

$d(x, y)$ ist der hyperbolische Abstand von x nach y , (siehe dazu mehr in 6.4). Betrachtet man das Bogenlängelement

$$ds = \frac{2 |dx|}{1 - |x|^2}, \quad x \in E,$$

mit dem man die Metrik in E konstruiert, so kann man mit

$$ds = \frac{2 |d\psi(x)|}{1 - |\psi(x)|^2}, \quad \psi(x) \in E, x \in S_+^2,$$

ein Metrik in S_+^2 konstruieren. Es ist

$$\psi(x) = (\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x)) = \left(0, \frac{x_1}{1+x_0}, \frac{x_2}{1+x_0}\right) \quad (\text{s.o.})$$

$$d\psi_i = \sum_{j=0}^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$d\psi_i = \frac{-x_i dx_0}{(1+x_0)^2} + \frac{dx_i}{1+x_0} = \frac{1}{1+x_0} \left(\frac{-x_i dx_0}{1+x_0} + dx_i \right) \quad (i = 1, 2)$$

$$\begin{aligned} |d\psi(x)|^2 &= d\psi_1^2 + d\psi_2^2 \\ &= \frac{1}{(1+x_0)^2} \left(\frac{x_1^2 dx_0^2}{(1+x_0)^2} - 2x_1 dx_1 \frac{dx_0}{1+x_0} + dx_1^2 + \frac{x_2^2 dx_0^2}{(1+x_0)^2} - 2x_2 dx_2 \frac{dx_0}{1+x_0} + dx_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{(1+x_0)^2} \left((1-x_0^2) \frac{dx_0^2}{(1+x_0)^2} - 2(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) \frac{dx_0}{1+x_0} + dx_1^2 + dx_2^2 \right) \end{aligned}$$

Es gilt

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \text{Ableitung:}$$

$$2x_0 dx_0 + 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 = 0$$

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = -x_0 dx_0$$

$$|d\psi(x)|^2 = \frac{1}{(1+x_0)^2} \left((1-x_0) \frac{dx_0^2}{1+x_0} + 2x_0 \frac{dx_0^2}{1+x_0} + dx_1^2 + dx_2^2 \right) = \frac{dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2}{(1+x_0)^2}$$

$$|d\psi(x)| = \frac{|dx|}{1+x_0}$$

$$1 - |\psi(x)|^2 = 1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1+x_0)^2} = \frac{1+x_0}{1+x_0} - \frac{1-x_0}{1+x_0} = \frac{2x_0}{1+x_0}$$

Somit ist

$$ds = \frac{2 |d\psi(x)|}{1 - |\psi(x)|^2} = \frac{|dx|}{x_0}. \quad \square$$

Mit diesem Bogenlängeelement kann man nun die Länge einer in S_+^2 verlaufenden Kurve $\alpha: [t_1, t_2] \rightarrow S_+^2, \alpha(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t))$, bestimmen zu

$$l(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\alpha}(t)|}{\alpha_0(t)} dt. \tag{6.2.1}$$

Der hyperbolische Abstand zweier Punkte $x, y \in S_+^2$ ist gegeben durch

$$d(x, y) = \inf_{\alpha} l(\alpha),$$

wobei das Infimum über alle Kurven α genommen wird, die x und y verbinden.

6.3 Die Isometrien im Hemisphärenmodell

Bei gegebenem f sei $g := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & S_+^2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ E & \xrightarrow{\varphi} & S_+^2 \end{array}$$

f sei eine Isometrie von E . Dann ist g , weil φ eine Isometrie ist, eine Isometrie von S_+^2 .

$$\varphi : (0, x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2}, \frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \frac{2x_2}{1 + |x|^2} \right), \quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$\psi = \varphi^{-1} : (x_0, x_1, x_2) \mapsto \left(0, \frac{x_1}{1 + x_0}, \frac{x_2}{1 + x_0} \right).$$

Wie sieht nun g aus? Offensichtlich gilt

$$g = \varphi \circ f \circ \psi \quad \text{mit } g(S_+^2) = S_+^2.$$

Beispiel:

Sei $x = (1/3, 2/3, 2/3) \in S_+^2$. Berechne nun das Bild von x unter der Abbildung $\varphi \circ f \circ \psi$. Dabei sei f als Isometrie von E die Inversion an dem Kreis $S(a, r) = \{x = (0, x_1, x_2); |x - a| = r\}$, $a = (0, a_1, a_2) \in R^3 \setminus (E \cup S^1), r > 0, |a|^2 - r^2 = 1$, weil $S(a, r) \perp S^1$. f hat also die Gestalt

$$f(x) = a + \frac{r^2}{|x - a|^2} (x - a) = a + \frac{|a|^2 - 1}{|x - a|^2} (x - a) \quad (x = (0, x_1, x_2) \in E) \tag{6.3.1}$$

Wegen der kanonischen Bijektion vom R^3 in den komplexen Zahlenkörper

$$(0, x_1, x_2) \mapsto x_1 + ix_2$$

kann man f auch komplex darstellen:

$$f(x) = a + \frac{|a|^2 - 1}{\bar{x} - \bar{a}} = \frac{a\bar{x} - 1}{\bar{x} - \bar{a}}, \quad x = x_1 + ix_2 \in E, a = a_1 + ia_2 \in C \setminus (E \cup S^1), |a| > 1.$$

In unserem Spezialfall sei a der Punkt $a = (0, 2, 1)$. Berechne nun $g(x) = \varphi \circ f \circ \psi(x)$, wobei x wie oben definiert ist:

$$\psi: (1/3, 2/3, 2/3) \mapsto (0, 1/2, 1/2).$$

Identifiziere dies nun mit dem Punkt $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ und $a = (0, 2, 1)$ mit $a = 2 + i$ und rechne in C weiter:

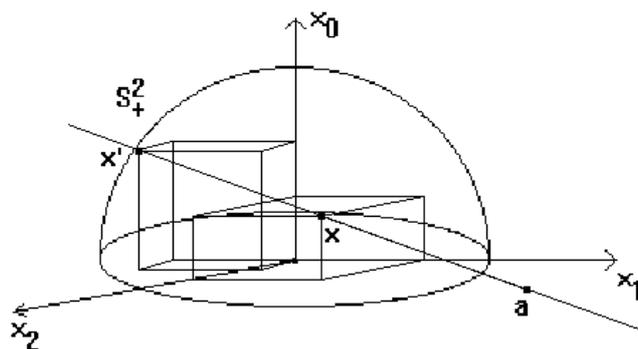
$$f: \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \mapsto \frac{(2+i)(1/2 - 1/2i) - 1}{1/2 - 1/2i - 2 + i} = \frac{1-i}{-3+i} = \frac{(1-i)(-3-i)}{10} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Identifiziere dies nun wieder mit $x = (0, -2/5, 1/5)$ und rechne im R^3 weiter:

$$\varphi: (0, -2/5, 1/5) \mapsto (2/3, -2/3, 1/3).$$

Für $x = (1/3, 2/3, 2/3) \in S_+^2$ ist also $g(x) = \varphi \circ f \circ \psi(x) = (2/3, -2/3, 1/3) \in S_+^2$. Dabei ist g eine Isometrie.

Behauptung: Die euklidische Gerade durch x und $g(x) = x'$ trifft die x_1, x_2 -Ebene genau im Punkt a .



Beweis der Behauptung: Die Gerade hat die Darstellung

$$g(x, x'): \quad y = x + t(x' - x) \quad y \in R^3, t \in R$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_0' - x_0 \\ x_1' - x_1 \\ x_2' - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/3 \\ -4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Für den Schnitt mit der x_1, x_2 -Achse muß gelten: $y_0 = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Und für diesen Wert von t ergibt sich der Punkt $(0, 2, 1)$, also tatsächlich genau a . \square

Man kann durch Nachprüfen feststellen, daß dies nicht nur in unserem Spezialfall gilt, sondern für jeden beliebigen Punkt $x \in S_+^2$ und jedes f , wobei f die Inversion an einem beliebigen Kreis $S(a, r)$ mit $a = (0, a_1, a_2) \in R^3 \setminus (E \cup S^1)$ in der x_1, x_2 -Ebene ist.

Somit weiß man, daß man einen Punkt $x \in S_+^2$ isometrisch abbilden kann, indem man die euklidische Gerade durch x und einen beliebigen Punkt der x_1, x_2 -Ebene außerhalb von $E \cup S^1$ mit S_+^2 schneidet. Dabei erhält man entweder zwei Punkte (x selber und den Bildpunkt x'), oder nur einen Punkt, nämlich x selbst, der dann Fixpunkt ist.

Nimmt man für f als Isometrie von E nicht die Inversion an einem Kreis, sondern die Inversion an einem Durchmesser, d.h.

$$f(z) = \frac{a\bar{z}}{\bar{a}} \quad \text{gemäß (3.3.4),}$$

so ergibt sich für das obige Beispiel $x = (1/3, 2/3, 2/3) \in S_+^2$ und $a = (0, 2, 1)$, daß

$$x' = g(x) = \varphi \circ f \circ \psi(x) = (2/3, -2/3, -1/3).$$

Man erkennt leicht, daß dies genau der Bildpunkt von x ist unter Inversion an der Ebene

$$P(a, 0) = \{y \in R^3; \langle a, y \rangle = 0\},$$

also einer Ebene senkrecht zur x_1, x_2 -Ebene, die durch den Nullpunkt geht. Dies ist aber auch wieder, wie oben, nicht nur für den Spezialfall, sondern auch allgemein für beliebige $x \in S_+^2$ und beliebige $a = (0, a_1, a_2) \in R^3 \setminus \{0\}$ gültig. Welche Gestalt haben nun die Isometrien g ?

Satz 6.3.1: Die Isometrien g von S_+^2 sind die Abbildungen

$$g(x) = x - 2 \frac{\langle a, x \rangle}{|a|^2} a, \quad a = (0, a_1, a_2) \in R^3 \setminus \{0\}, x \in S_+^2, \quad (6.3.2)$$

$$g(x) = a + \frac{r^2}{|x - a|^2} (x - a), \quad a = (0, a_1, a_2) \in R^3 \setminus (E \cup S^1), |a|^2 - r^2 = 1, x \in S_+^2 \quad (6.3.3)$$

und deren Zusammensetzungen. Diese Abbildungen sind Geradenspiegelungen und die Poincaré-Erweiterungen der Isometrien von E , also Inversionen an Sphären und Ebenen.

Beweis: Betrachtet man den eben genannten Fall, daß f in E die Inversion an einem Durchmesser ist, so gilt für ein $x \in S_+^2$

$$g(x) = x - 2 \frac{\langle a, x \rangle}{|a|^2} a,$$

mit $a = (0, a_1, a_2) \in R^3 \setminus \{0\}$. g ist die Inversion an der Ebene $P(a,0)$. Diese Ebene steht senkrecht auf der x_1, x_2 -Ebene und geht durch den Nullpunkt. Somit schneidet sie S_+^2 senkrecht, und der Schnitt ist eine hyperbolische Gerade. g ist also eine Geradenspiegelung.

g geht also aus f hervor und hat die gleiche Gestalt wie f (im reellen Fall) mit gleichem a , nur wirkt f im R^2 und g im R^3 . Vergleicht man die Sachlage mit 4.3 (Isometrien von H^2), so erkennt man, daß g gerade die Poincaré-Erweiterung von f in die um eins größere höhere Dimension ist.

Im ersten Fall, d.h. f ist als Isometrie in E die Inversion an einem Kreisbogen L senkrecht zu S^1 , gilt für ein $x \in S_+^2$

$$g(x) = a + \lambda(x - a),$$

wobei a ein beliebiger Punkt der x_1, x_2 -Ebene ist, der außerhalb von $E \cup S^1$ liegt, also $|a| > 1$ (a ist der Mittelpunkt des Kreises, der L enthält). λ muß so gewählt werden, daß $|g(x)| = 1$, d.h. $g(x) \in S_+^2$:

$$|g(x)|^2 = |a|^2 + 2\lambda \langle a, x - a \rangle + \lambda^2 |x - a|^2 \stackrel{!}{=} 1$$

$$\lambda^2 + 2\lambda \frac{\langle a, x \rangle - |a|^2}{|x - a|^2} + \frac{|a|^2 - 1}{|x - a|^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= \frac{|a|^2 - \langle a, x \rangle}{|x - a|^2} \pm \sqrt{\frac{|a|^4 - 2|a|^2 \langle a, x \rangle + \langle a, x \rangle^2 - (|a|^2 - 1)|x - a|^2}{|x - a|^4}} \\ &=: \frac{|a|^2 - \langle a, x \rangle \pm \sqrt{D}}{|x - a|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= |a|^4 - 2|a|^2 \langle a, x \rangle + \langle a, x \rangle^2 - |a|^2 |x|^2 + 2|a|^2 \langle a, x \rangle - |a|^4 + |x|^2 - 2 \langle a, x \rangle + |a|^2 \\ &= \langle a, x \rangle^2 - |a|^2 |x|^2 + |x|^2 - 2 \langle a, x \rangle + |a|^2 \end{aligned}$$

Mit $|x| = 1$ ergibt sich

$$D = \langle a, x \rangle^2 - 2 \langle a, x \rangle + 1 = (\langle a, x \rangle - 1)^2$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{|a|^2 - \langle a, x \rangle \pm (\langle a, x \rangle - 1)}{|x - a|^2}$$

$$\lambda_1 = \frac{|a|^2 - 2 \langle a, x \rangle + 1}{|x|^2 - 2 \langle a, x \rangle + |a|^2} = 1 \quad \text{wegen } |x| = 1,$$

$$\lambda_2 = \frac{|a|^2 - 1}{|x - a|^2}$$

λ_1 liefert $g(x) = x$, also den Punkt x selber, λ_2 liefert

$$g(x) = a + \frac{|a|^2 - 1}{|x - a|^2}(x - a) \quad x \in S_+^2.$$

Dies ist nun genau die gleiche Darstellung wie (6.3.1), nur diesmal für Punkte in S_+^2 , also im dreidimensionalen Raum. Setzt man $r := \sqrt{|a|^2 - 1}$, so ist g gerade wieder eine Inversion, diesmal nicht an einem Kreis, sondern an einer Sphäre $S(a, r) = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in R^3; |x - a| = r\}$ mit $a = (0, a_1, a_2) \in R^3$, $r > 0$. Diese Sphäre steht wegen $|a|^2 - 1 = r^2$ senkrecht auf S_+^2 , d.h. die Tangentialebenen an $S(a, r)$ und S_+^2 in den Schnittpunkten von $S(a, r)$ und S_+^2 stehen aufeinander senkrecht.

Wie sieht der Schnitt der Kugelschale $S(a, r)$ mit S_+^2 aus?

$$\begin{array}{l} S(a, r): \quad |x - a|^2 = r^2 \\ \quad \quad \quad |x|^2 - 2 \langle a, x \rangle + |a|^2 - r^2 = 0 \\ \quad \quad \quad |x|^2 - 2 \langle a, x \rangle + 1 = 0 \\ S_+^2: \quad \quad \quad |x|^2 \quad \quad \quad - 1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2 \langle a, x \rangle + 2 = 0 \\ \quad \quad \quad \langle a, x \rangle = 1 \end{array}$$

Der Schnitt von $S(a, r)$ und S_+^2 liegt also in der Ebene $\langle a, x \rangle = 1$. Diese Ebene ist, weil die erste Komponente von a gleich Null ist, senkrecht zur x_1, x_2 -Ebene und schneidet sie in der Polaren von a bezüglich S^1 , denn der Punkt $a/|a|^2$ liegt in $\langle a, x \rangle = 1$ und die Gerade durch 0 und a schneidet offensichtlich die Ebene $\langle a, x \rangle = 1$ senkrecht, denn der Vektor a ist der Normalenvektor der Ebene.

Es folgt, daß der Schnitt von $S(a, r)$ mit S_+^2 genau eine hyperbolische Gerade L' ist, und zwar genau die Gerade, die aus der Geraden L in E hervorgeht bei der Abbildung φ , die das Modell E auf S_+^2 abbildet. Diese bleibt natürlich bei der Inversion an $S(a, r)$ fix. L' teilt S_+^2 in zwei Teilmengen $(S_+^2)_1$ und $(S_+^2)_2$. Man erkennt, daß g Elemente von $(S_+^2)_1$ auf $(S_+^2)_2$ abbildet und umgekehrt. g ist also offensichtlich eine Geradenspiegelung.

Somit haben wir nun festgestellt, daß die Inversion g in S_+^2 aus der Inversion f in E hervorgeht und auch zusätzlich noch die gleiche Gestalt hat mit gleichem Mittelpunkt a auf der x_1, x_2 -Ebene. Der Unterschied zwischen beiden ist nur, daß die eine Inversion im R^3 wirkt, während die andere im R^2 wirkt. Vergleicht man dies mit 4.3 (Isometrien von H^2), so erkennt man, daß die Inversion g gerade die Poincaré-Erweiterung von f ist in die um 1 größere höhere Dimension. \square

Satz 6.3.2: Die Isometrien bilden Geraden von S_+^2 auf Geraden von S_+^2 ab.

Beweis: Erinnerung: eine Menge

$$L = \left\{ \left(\frac{1-bt}{bt}, \frac{1}{b}, \frac{\pm\sqrt{2bt-t^2-1}}{bt} \right), b \in \mathbb{R}, |b| > 1, t \in J = (b - \sqrt{b^2-1}, 1/b) \right\}$$

beschreibt eine hyperbolische Gerade L in S_+^2 . Zeige die Aussage für den Fall $b = 2$:

$$L = \left\{ \left(\frac{1-2t}{2t}, \frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{4t-t^2-1}}{2t} \right), t \in J = (2 - \sqrt{3}, 1/2) \right\}$$

Als Isometrie diene

$$f(x) = a + \frac{|a|^2 - 1}{|x - a|^2} (x - a), \quad x \in S_+^2,$$

mit z.B. $a = (0, 2, 1)$. Bestimme nun drei Punkte auf L und bilde sie unter f ab; nehme z.B. $t_1 = 3/10, t_2 = 7/20, t_3 = 2/5, t_i \in J$. Dann ist

$$x_i = \left(\frac{1-2t_i}{2t_i}, \frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{4t_i-t_i^2-1}}{2t_i} \right)$$

$$x_1 = (2/3, 1/2, \sqrt{11}/6)$$

$$x_2 = (3/7, 1/2, \sqrt{111}/7)$$

$$x_3 = (1/4, 1/2, \sqrt{11}/4)$$

Zeige nun, daß die Bildpunkte der x_i unter der Abbildung f auf einer Geraden L' liegen.

$$f: x_1 = (2/3, 1/2, \sqrt{11}/6) \mapsto \frac{1}{15-2\sqrt{11}} (8, 9-2\sqrt{11}, 6-2\sqrt{11}) = f(x_1)$$

$$x_2 = (3/7, 1/2, \sqrt{111}/7) \mapsto \frac{1}{35-2\sqrt{111}} (12, 21-2\sqrt{111}, 14-2\sqrt{111}) = f(x_2)$$

$$x_3 = (1/4, 1/2, \sqrt{11}/4) \mapsto \frac{1}{5-\sqrt{11}} (1, 3-\sqrt{11}, 2-\sqrt{11}) = f(x_3)$$

Die Ebene E durch diese drei Punkte ist z.B. darstellbar durch

$$E: x = f(x_3) + r(f(x_2) - f(x_3)) + s(f(x_1) - f(x_3)) \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Setzt man die Punkte ein und faßt konstante Vorfaktoren zu u und v zusammen, so erhält E die Darstellung

$$E: x = \frac{1}{5 - \sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 - \sqrt{11} \\ 2 - \sqrt{11} \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 25 - 12\sqrt{11} + 2\sqrt{111} \\ 14\sqrt{11} - 4\sqrt{111} \\ 21\sqrt{11} - 6\sqrt{111} \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 25 - 6\sqrt{11} \\ 2\sqrt{11} \\ 3\sqrt{11} \end{pmatrix}$$

Die $f(x_i)$ liegen damit also auf dem Schnitt von E mit S_+^2 . Betrachtet man nun den Vektor

$$y = (0, 3, -2),$$

so erkennt man, daß er senkrecht auf beiden Richtungsvektoren von E steht. Damit ist er ein Normalenvektor der Ebene E . Da die erste Komponente von y gleich Null ist, verläuft y parallel zur x_1, x_2 -Ebene, und somit steht E senkrecht auf der x_1, x_2 -Ebene. $E \cap S_+^2$ ist also eine hyperbolische Gerade L' , die die Punkte $f(x_i)$ enthält. \square

6.4 Der hyperbolische Abstand

Satz 6.4.1: *Der hyperbolische Abstand zweier Punkte $x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2) \in S_+^2$ ist gegeben durch*

$$d(x, y) = \operatorname{arcosh} \frac{1 - x_1 y_1 - x_2 y_2}{x_0 y_0}.$$

Beweis: Im folgenden seien $x = (x_0, x_1, 0), y = (y_0, y_1, 0) \in S_+^2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \alpha: [t_1, t_2] \rightarrow S_+^2, \alpha(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t))$, eine stetig differenzierbare Kurve auf S_+^2 mit $\dot{\alpha}_0(t) \neq 0$ für alle $t \in [t_1, t_2]$, die x und y verbindet, d.h. $\alpha(t_1) = x, \alpha(t_2) = y$. Dann gilt nach (6.2.1):

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\alpha}(t)|}{\alpha_0(t)} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2}}{\alpha_0} dt \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 &= 1 && \text{Ableitung:} \\ 2\alpha_0 \dot{\alpha}_0 + 2\alpha_1 \dot{\alpha}_1 + 2\alpha_2 \dot{\alpha}_2 &= 0 \\ \dot{\alpha}_0 &= -\frac{\alpha_1 \dot{\alpha}_1 + \alpha_2 \dot{\alpha}_2}{\alpha_0} && (\alpha_0 > 0) \end{aligned}$$

$$\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 = \frac{\alpha_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + \alpha_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + \alpha_0^2 \dot{\alpha}_1^2 + \alpha_0^2 \dot{\alpha}_2^2}{\alpha_0^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-\alpha_2^2)\dot{\alpha}_1^2 + (1-\alpha_1^2)\dot{\alpha}_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2}{\alpha_0^2} \\
&= \frac{\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 - (\alpha_1\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1\alpha_2)^2}{\alpha_0^2} \\
\sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2} &= \frac{\sqrt{\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 - (\alpha_1\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1\alpha_2)^2}}{\alpha_0} \\
l(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 - (\alpha_1\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1\alpha_2)^2}}{\alpha_0^2} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 - (\alpha_1\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1\alpha_2)^2}}{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2} dt \\
&\geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\dot{\alpha}_1^2}}{1-\alpha_1^2} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{2|\dot{\alpha}_1|}{1-\alpha_1^2} dt = \frac{1}{2} \left| \left[\ln \frac{1+\alpha_1(t)}{1-\alpha_1(t)} \right]_{t_1}^{t_2} \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \ln \frac{1+y_1}{1-y_1} - \ln \frac{1+x_1}{1-x_1} \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{(1+y_1)(1-x_1)}{(1+x_1)(1-y_1)} \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{y_0^2 x_0^2}{(1+x_1)^2 (1-y_1)^2} \right| \\
&= \left| \ln \frac{x_0 y_0}{(1+x_1)(1-y_1)} \right|
\end{aligned}$$

Die Länge einer solchen in S_+^2 verlaufenden Kurve α ist also immer größer oder gleich diesem Wert. Dieses Minimum wird aber angenommen, denn das Gleichheitszeichen gilt, wenn $\alpha_2(t) = 0$ ist für alle $t \in [t_1, t_2]$. Dann verläuft α in dem Schnitt der x_0, x_1 -Ebene mit S_+^2 , also auf einer hyperbolischen Geraden. Es gilt damit

$$d(x, y) = \left| \ln \frac{x_0 y_0}{(1+x_1)(1-y_1)} \right| \quad \text{für obige } x, y.$$

Wegen $\cosh(x) = \cosh(-x)$ ist $\cosh(d(x, y))$ von den Betragsstrichen unabhängig, und es gilt

$$\begin{aligned}
\cosh(d(x, y)) &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 y_0}{(1+x_1)(1-y_1)} + \frac{(1+x_1)(1-y_1)}{x_0 y_0} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{(1-x_1)(1+y_1) + (1+x_1)(1-y_1)}{x_0 y_0} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1-x_1+y_1-x_1 y_1 + 1+x_1-y_1-x_1 y_1}{x_0 y_0} \right) \\
\cosh(d(x, y)) &= \frac{1-x_1 y_1}{x_0 y_0} \quad \text{für } x = (x_0, x_1, 0), y = (y_0, y_1, 0) \in S_+^2
\end{aligned}$$

Eine sehr lange und aufwendige Rechnung, die hier nicht aufgeführt wird, zeigt, daß für eine Isometrie g der Gestalt (6.3.2) oder (6.3.3) gilt

$$\frac{1 - x_1 y_1 - x_2 y_2}{x_0 y_0} = \frac{1 - [g(x)]_1 [g(y)]_1 - [g(x)]_2 [g(y)]_2}{[g(x)]_0 [g(y)]_0},$$

wobei $[g(x)]_i$ die i -te Komponente von $g(x)$ beschreibt.

Man kann also die obigen Punkte x und y beliebig durch g abbilden und erhält die allgemeine Abstandsbeziehung für $x = (x_0, x_1, x_2)$, $y = (y_0, y_1, y_2) \in S_+^2$:

$$d(x, y) = \operatorname{arcosh} \frac{1 - x_1 y_1 - x_2 y_2}{x_0 y_0}. \quad \square$$

Diese Beziehung ist wohldefiniert, denn es ist nach (1.6.1)

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq |x||y| = 1$$

$$x_0 y_0 \leq 1 - x_1 y_1 - x_2 y_2$$

$$\frac{1 - x_1 y_1 - x_2 y_2}{x_0 y_0} \geq 1$$

Umformungen der Abstandsbeziehung: definiere β als Quotient von quadratischen Formen:

$$\beta(x, y) := \frac{1 - x_1 y_1 - x_2 y_2}{x_0 y_0}, \quad x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2) \in S_+^2$$

Es gilt

$$\cosh(d(x, y)) = \beta(x, y) = 2 \cosh^2\left(\frac{1}{2}d(x, y)\right) - 1$$

$$\cosh^2\left(\frac{1}{2}d(x, y)\right) = \frac{\beta(x, y) + 1}{2}$$

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}d(x, y)\right) = \cosh^2\left(\frac{1}{2}d(x, y)\right) - 1$$

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}d(x, y)\right) = \frac{\beta(x, y) - 1}{2}$$

$$\tanh^2\left(\frac{1}{2}d(x, y)\right) = \frac{\beta(x, y) - 1}{\beta(x, y) + 1}$$

$$\frac{1}{2}d(x, y) = \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{\beta(x, y) - 1}{\beta(x, y) + 1}} \right)$$

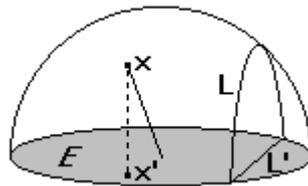
$$d(x, y) = \ln \frac{\sqrt{\beta(x, y) + 1} + \sqrt{\beta(x, y) - 1}}{\sqrt{\beta(x, y) + 1} - \sqrt{\beta(x, y) - 1}}$$

§ 7 Das Klein'sche Modell

Das fünfte und letzte Modell ist das Klein'sche Modell. Es ist wieder ein Modell in der Ebene. Der Raum, in dem die Geometrie hier stattfindet, ist erneut die Einheitskreisscheibe

$$E = \{x = (0, x_1, x_2) \in R^3; |x| < 1\}.$$

Man erhält dieses Modell durch vertikale Projektion von S_+^2 auf die x_1, x_2 -Ebene.



Die Abbildungsgleichung ist sehr einfach:

$$f: S_+^2 \rightarrow E$$

$$x = (x_0, x_1, x_2) \mapsto (0, x_1, x_2) = x'$$

f ist eine Bijektion, denn es existiert eine Umkehrabbildung

$$g: E \rightarrow S_+^2$$

$$x = (0, x_1, x_2) \mapsto (\sqrt{1 - |x|^2}, x_1, x_2) = (g_0(x), g_1(x), g_2(x)) = g(x)$$

7.1 Die hyperbolischen Geraden im Klein'schen Modell

Definition 7.1.1: Die hyperbolischen Geraden im Klein'schen Modell sind die Sehnen des Einheitskreises.

Bemerkung: es ist offensichtlich, daß die Abbildung $f: S_+^2 \rightarrow E$ Geraden von S_+^2 auf Geraden von E abbildet.

7.2 Die Metrik

Satz 7.2.1: Damit f eine Isometrie von S_+^2 nach E ist, muß für das Bogenlängenelement ds in E , mit dem man die Metrik in E erzeugt, gelten:

$$ds = \frac{\sqrt{|dx|^2 - (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)^2}}{1 - |x|^2}.$$

Beweis: Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(f(x), f(y)) & x, y \in S_+^2, f(x), f(y) \in E, & \quad \text{oder äquivalent dazu} \\ d(g(x), g(y)) &= d(x, y) & g(x), g(y) \in S_+^2, x, y \in E. \end{aligned}$$

Das Bogenlängelement, mit dem die Metrik in S_+^2 konstruiert wurde, ist

$$ds = \frac{|dx|}{x_0}, \quad x = (x_0, x_1, x_2) \in S_+^2,$$

somit kann man in E eine Metrik konstruieren durch das Bogenlängelement

$$ds = \frac{|dg(x)|}{g_0(x)}, \quad g(x) = (g_0(x), g_1(x), g_2(x)) \in S_+^2, x \in E.$$

Es ist

$$|dg|^2 = dg_0^2 + dg_1^2 + dg_2^2 \quad \text{mit}$$

$$dg_i = \frac{\partial g_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g_i}{\partial x_2} dx_2$$

$$dg_0 = \frac{-x_1 dx_1 - x_2 dx_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}$$

$$dg_i = dx_i \quad (i = 1, 2)$$

$$|dg|^2 = \frac{x_1^2 dx_1^2 + 2x_1 x_2 dx_1 dx_2 + x_2^2 dx_2^2 + dx_1^2 - x_1^2 dx_1^2 - x_2^2 dx_1^2 + dx_2^2 - x_1^2 dx_2^2 - x_2^2 dx_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

$$= \frac{dx_1^2 + dx_2^2 - (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)^2}{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 - (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}$$

$$ds = \frac{\sqrt{|dx|^2 - (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)^2}}{1 - |x|^2}. \quad \square$$

Mit diesem Bogenlängelement kann man nun die Länge einer in E verlaufenden Kurve $\alpha: [t_1, t_2] \rightarrow E, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$, bestimmen zu

$$l(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{|\dot{\alpha}|^2 - (\alpha_1 \dot{\alpha}_2 - \alpha_2 \dot{\alpha}_1)^2}}{1 - |\alpha|^2} dt, \quad (7.2.1)$$

und der hyperbolische Abstand zwischen zwei Punkten $x, y \in E$ ist

$$d(x, y) = \inf_{\alpha} l(\alpha),$$

wobei das Infimum über alle Kurven α genommen wird, die x und y verbinden.

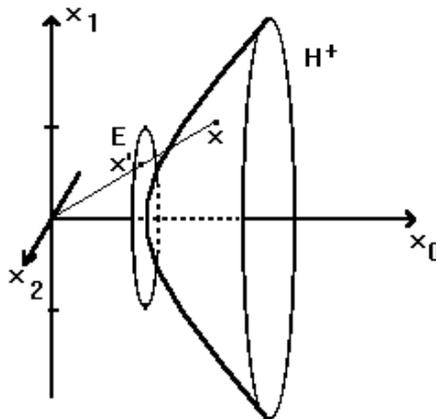
7.3 Die kanonische Projektion $H^+ \rightarrow E$

Satz 7.3.1: *Man erhält das Klein'sche Modell auch direkt aus dem H^+ -Modell, indem man dieses Modell stereographisch vom Nullpunkt aus auf die Einheitskreisscheibe*

$$E = \left\{ x = (1, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}$$

abbildet.

Beweis:



Nimmt man einen Punkt $x = (x_0, x_1, x_2) \in H^+$, so erhält man den Bildpunkt x' durch

$$x' = \lambda x = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2),$$

wobei λ so zu wählen ist, daß die erste Komponente von x' gleich 1 ist, also $\lambda = 1/x_0$. Daraus ergibt sich die Abbildungsgleichung:

$$h: H^+ \rightarrow E$$

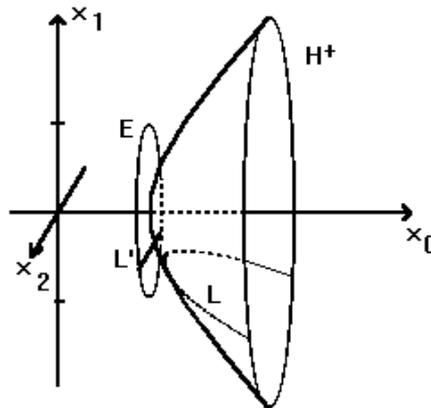
$$x = (x_0, x_1, x_2) \mapsto \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right) = x'$$

Die Abbildung ist bijektiv, denn es gibt eine Umkehrabbildung

$$j: E \rightarrow H^+$$

$$x = (1, x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}, \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right) = (j_0(x), j_1(x), j_2(x)) = j(x)$$

Die Geraden von H^+ sind bekanntlich die nichtleeren Schnitte von zweidimensionalen Untervektorräumen, also Ebenen durch den Nullpunkt, mit H^+ . Diese werden offensichtlich durch h ebenfalls auf Sehnen in E abgebildet.



Es ergibt sich auch die gleiche Metrik in E : damit h eine Isometrie ist, muß gelten:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(h(x), h(y)) & x, y \in H^+, h(x), h(y) \in E, & \quad \text{oder äquivalent dazu} \\ d(j(x), j(y)) &= d(x, y) & j(x), j(y) \in H^+, x, y \in E. \end{aligned}$$

Das Bogenlängenelement ds , mit dem man die Metrik in H^+ konstruiert ist gegeben durch

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2,$$

somit konstruiert man eine Metrik in E mit dem Bogenlängenelement

$$ds^2 = -dj_0^2(x) + dj_1^2(x) + dj_2^2(x),$$

damit h eine Isometrie von H^+ nach E ist. Es ist

$$dj_i = \frac{\partial j_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial j_i}{\partial x_2} dx_2 \quad (i = 0, 1, 2)$$

$$\frac{\partial j_0}{\partial x_j} = \frac{x_j}{\sqrt{(1-x_1^2-x_2^2)^3}} \quad (j = 1, 2)$$

$$dj_0^2 = \frac{x_1^2 dx_1^2 + 2x_1 x_2 dx_1 dx_2 + x_2^2 dx_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^3}$$

$$\frac{\partial j_1}{\partial x_1} = \frac{1 - x_2^2}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2)^3}}$$

$$\frac{\partial j_1}{\partial x_2} = \frac{x_1 x_2}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2)^3}}$$

$$dj_1^2 = \frac{dx_1^2 + x_2^4 dx_1^2 - 2x_2^2 dx_1^2 + 2x_1 x_2 dx_1 dx_2 (1 - x_2^2) + x_1^2 x_2^2 dx_2^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^3}$$

$$\frac{\partial j_2}{\partial x_1} = \frac{x_1 x_2}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2)^3}}$$

$$\frac{\partial j_2}{\partial x_2} = \frac{1 - x_1^2}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2)^3}}$$

$$dj_2^2 = \frac{dx_2^2 + x_1^4 dx_2^2 - 2x_1^2 dx_2^2 + 2x_1 x_2 dx_1 dx_2 (1 - x_1^2) + x_1^2 x_2^2 dx_1^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^3}$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dj_0^2 + dj_1^2 + dj_2^2 \\ &= \frac{dx_1^2 (1 - x_1^2 - x_2^2) + dx_2^2 (1 - x_1^2 - x_2^2) - (x_2^2 dx_1^2 - 2x_1 x_2 dx_1 dx_2 + x_1^2 dx_2^2) (1 - x_1^2 - x_2^2)}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^3} \\ &= \frac{dx_1^2 + dx_2^2 - (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2} \\ ds &= \frac{\sqrt{|dx|^2 - (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)^2}}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \end{aligned}$$

also tatsächlich das gleiche Bogenlängenelement wie in 7.2 und somit die gleiche Metrik. \square

7.4 Die Isometrien im Klein'schen Modell

Bei gegebenem φ sei $\psi := f \circ \varphi \circ f^{-1}$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} S_+^2 & \xrightarrow{f} & E \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ S_+^2 & \xrightarrow{f} & E \end{array}$$

φ sei eine Isometrie von S_+^2 . Dann ist ψ , weil f eine Isometrie ist, eine Isometrie von E .

$$f: (x_0, x_1, x_2) \mapsto (0, x_1, x_2)$$

$$f^{-1}: (0, x_1, x_2) \mapsto (\sqrt{1 - |x|^2}, x_1, x_2)$$

Offensichtlich ist

$$\psi = f \circ \varphi \circ f^{-1} \quad \text{mit } \psi(E) = E.$$

Satz 7.4.1: Die Isometrien von E sind die Abbildungen der Form

$$\psi(x) = a + \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2 \langle a, x \rangle + |a|^2} (x - a) \quad x \in E, a \in \mathbb{R}^2, |a| > 1 \quad (7.4.1)$$

$$\psi(x) = x - 2 \langle a, x \rangle \frac{a}{|a|^2} \quad x \in E, a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad (7.4.2)$$

und deren Zusammensetzungen.

Beweis: Betrachte zuerst den Fall, φ habe als Isometrie von S_+^2 die Gestalt

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a + \frac{|a|^2 - 1}{|x - a|^2} (x - a), & x \in S_+^2, a = (0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3, |a| > 1 \\ &= a + \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2 \langle a, x \rangle + |a|^2} (x - a) \end{aligned}$$

Für ein $x = (0, x_1, x_2) \in E$ gilt dann ($\langle a, x \rangle$ ist invariant unter f, f^{-1}):

$$\begin{aligned} \varphi \circ f^{-1}(x) &= (0, a_1, a_2) + \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2 \langle a, x \rangle + |a|^2} \left(\sqrt{1 - |x|^2}, x_1 - a_1, x_2 - a_2 \right) \\ \psi(x) = f \circ \varphi \circ f^{-1}(x) &= (0, a_1, a_2) + \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2 \langle a, x \rangle + |a|^2} (0, x_1 - a_1, x_2 - a_2) \end{aligned}$$

Nimmt man den Fall an, φ habe die Gestalt

$$\varphi(x) = x - 2 \langle a, x \rangle \frac{a}{|a|^2}, \quad x \in S_+^2, a = (0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

so gilt für ein $x \in E$

$$\begin{aligned} \varphi \circ f^{-1}(x) &= \left(\sqrt{1 - |x|^2}, x_1, x_2 \right) - 2 \langle a, x \rangle \frac{a}{|a|^2}, \\ \psi(x) = f \circ \varphi \circ f^{-1}(x) &= (0, x_1, x_2) - 2 \langle a, x \rangle \frac{a}{|a|^2}. \end{aligned}$$

Es ist nun sinnvoll, von der dreidimensionalen Darstellung ganz in die zweidimensionale überzugehen. Dazu identifiziert man E wieder mit

$$E = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}.$$

Dann ergeben sich genau die Abbildungen

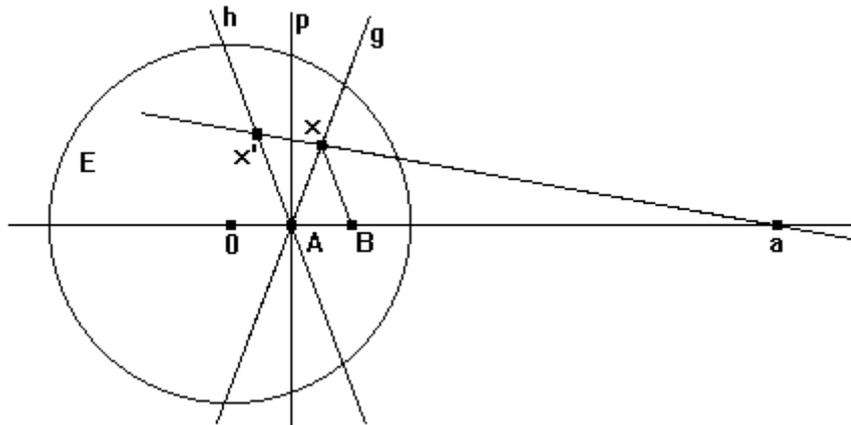
$$\psi(x) = a + \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2 \langle a, x \rangle + |a|^2} (x - a) \quad x \in E, a \in \mathbb{R}^2, |a| > 1$$

$$\psi(x) = x - 2 \frac{\langle a, x \rangle}{|a|^2} a \quad x \in E, a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \quad \square$$

Weil diese Isometrien von den einzigen Isometrien von S_+^2 stammen, sind sie auch die einzigen von E .

Wie sehen die Isometrien geometrisch aus?

Isometrie der Form (7.4.1): Sei $a \in \mathbb{R}^2, |a| > 1$. Nimmt man einen Punkt $x \in E$, der nicht auf der Geraden durch 0 und a liegt, so erhält man den Bildpunkt wie folgt: man konstruiert die Polare p zum Punkt a bezüglich S^1 und schneidet sie mit der Geraden durch 0 und a . Der Schnittpunkt sei A . Dann zieht man die Gerade g durch A und x . h sei die Bildgerade von g bei Spiegelung an p . Der Schnitt von h mit der Geraden durch a und x ist der Bildpunkt x' .



Daß das funktioniert, ist noch zu beweisen:

Beweis: Zieht man durch x die Parallele zu h , so schneidet diese die Gerade durch 0 und a in B . Es ist

$$\overline{Aa} = |a| - \frac{1}{|a|}, \overline{AB} = 2 \left(\frac{\langle a, x \rangle}{|a|} - \frac{1}{|a|} \right) \Rightarrow \overline{Ba} = |a| - \frac{1}{|a|} - 2 \left(\frac{\langle a, x \rangle}{|a|} - \frac{1}{|a|} \right) = \frac{1}{|a|} - 2 \frac{\langle a, x \rangle}{|a|} + |a|$$

Der Bildpunkt x' hat die Darstellung

$$x' = a + \lambda(x - a),$$

wobei sich der Wert von λ aus dem Strahlensatz ergibt:

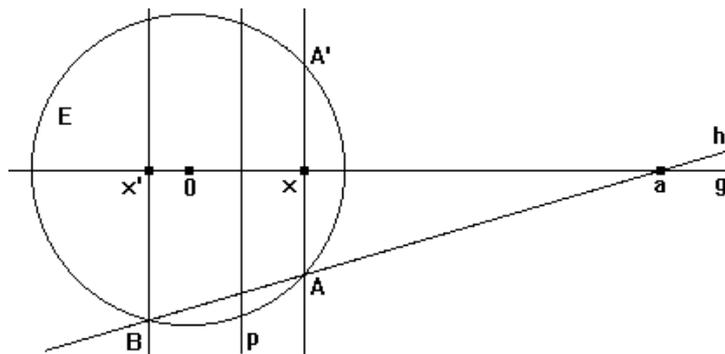
$$\frac{\lambda|x-a|}{|x-a|} = \frac{\overline{Aa}}{\overline{Ba}} = \frac{|a| - \frac{1}{|a|}}{\frac{1}{|a|} - 2\frac{\langle a,x \rangle}{|a|} + |a|} = \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2\langle a,x \rangle + |a|^2}$$

Somit ist

$$x' = a + \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2\langle a,x \rangle + |a|^2}(x - a),$$

also tatsächlich eine Abbildung der Form (7.4.1). \square

Nimmt man einen Punkt $x \in E$, der auf der Geraden g durch 0 und a läuft, so geht man wie folgt vor: man zieht die Senkrechte zu g durch den Punkt x . Diese schneidet S^1 in den Punkten A und A' . Die Gerade h durch a und z.B. A schneidet S^1 in den Punkten A und B (dabei ist $A = B$ möglich). Zieht man nun die Senkrechte zu g durch den Punkt B , so schneidet diese g im Punkt x' .



p ist die Polare von a bezüglich S^1 . Daß dies funktioniert, zeigt folgender

Beweis: Man kann aus dem Punkt A den Punkt B bestimmen. Es ist

$$B = a + \lambda(A - a)$$

Den Wert für λ erhält man durch die Bedingung $|B| = 1$:

$$|B|^2 = |a|^2 + 2\lambda\langle a, A - a \rangle + \lambda^2|A - a|^2 \stackrel{!}{=} 1$$

$$\lambda^2 + 2\lambda \frac{\langle A, a \rangle - |a|^2}{|A - a|^2} + \frac{|a|^2 - 1}{|A - a|^2} = 0$$

Eine analoge Rechnung wie in 6.3 (Isometrien des Hemisphärenmodells) liefert

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{|a|^2 - 1}{|A - a|^2} \quad \text{und somit}$$

$$\begin{aligned}
 B &= a + \frac{|a|^2 - 1}{|A - a|^2} (A - a) = a + \frac{|a|^2 - 1}{|A|^2 - 2 \langle A, a \rangle + |a|^2} (A - a) \\
 &= a + \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2 \langle A, a \rangle + |a|^2} (A - a) \quad \text{wegen } |A| = 1.
 \end{aligned}$$

Damit gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{|x' - a|}{|x - a|} = \frac{|B - a|}{|A - a|} = \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2 \langle A, a \rangle + |a|^2} = \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2 \langle x, a \rangle + |a|^2} \quad \text{wegen } \langle A, a \rangle = \langle x, a \rangle$$

und somit ergibt sich

$$x' = a + \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2 \langle x, a \rangle + |a|^2} (x - a),$$

also tatsächlich die Form (7.4.1). \square

Die Isometrie der Form (7.4.2) ist gerade die Inversion an einem Durchmesser von E .

Damit sind die Isometrien offensichtlich Geradenspiegelungen, und zwar von ganz spezieller Form: es sind sogenannte Polarenspiegelungen.

Durch Nachrechnen kann man sich auch davon überzeugen, daß die Isometrien hyperbolische Geraden auf hyperbolische Geraden abbilden.

7.5 Der Abstand zweier Punkte im Klein'schen Modell

Satz 7.5.1: *Der hyperbolische Abstand zweier Punkte $x, y \in E$ ist gegeben durch*

$$d(x, y) = \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}}{1 - \langle x, y \rangle} \right).$$

Beweis: Seien $x = (0, x_2), y = (0, y_2) \in E$ zwei Punkte, $\alpha: [t_1, t_2] \rightarrow E, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, eine stetig differenzierbare Kurve mit $\dot{\alpha}_2(t) \neq 0$ für alle $t \in [t_1, t_2]$, die ganz in E verläuft und die Punkte x und y verbindet, d.h. $\alpha(t_1) = x, \alpha(t_2) = y$. Dann hat α nach (7.2.1) die Länge

$$l(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 - (\alpha_2 \dot{\alpha}_1 - \alpha_1 \dot{\alpha}_2)^2}}{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} dt$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\dot{\alpha}_2^2}}{1 - \alpha_2^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\alpha}_2|}{1 - \alpha_2^2} dt = \frac{1}{2} \left| \left[\ln \frac{1 + \alpha_2(t)}{1 - \alpha_2(t)} \right]_{t_1}^{t_2} \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{1 + y_2}{1 - y_2} - \ln \frac{1 + x_2}{1 - x_2} \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \ln \frac{(1 + y_2)(1 - x_2)}{(1 - y_2)(1 + x_2)} \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{1 + y_2 - x_2 - x_2 y_2}{1 - y_2 + x_2 - x_2 y_2} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - x_2 y_2 + |x_2 - y_2|}{1 - x_2 y_2 - |x_2 - y_2|} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \langle x, y \rangle + \sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}}{1 - \langle x, y \rangle - \sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}} \quad \text{für obige } x, y
\end{aligned}$$

Die Länge von α ist also immer größer oder gleich diesem Wert. Dieses Minimum wird aber angenommen, denn das Gleichheitszeichen gilt, wenn $\alpha_1(t) = 0$ für alle $t \in [t_1, t_2]$. Dann verläuft α auf einer hyperbolischen Geraden, nämlich einer speziellen Sehne von E , einem Durchmesser. Es ist also

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \langle x, y \rangle + \sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}}{1 - \langle x, y \rangle - \sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}} \quad \text{für obige } x, y \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{\sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}}{1 - \langle x, y \rangle}}{1 - \frac{\sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}}{1 - \langle x, y \rangle}} \quad (\langle x, y \rangle \leq |x||y| < 1) \\
&= \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}}{1 - \langle x, y \rangle} \right)
\end{aligned}$$

Eine erneut sehr lange und aufwendige Rechnung zeigt, daß der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}}{1 - \langle x, y \rangle}$$

invariant ist unter den Isometrien (7.3.1) und (7.3.2) von E . Somit kann man die Punkte x und y beliebig isometrisch abbilden, ohne den Ausdruck zu verändern, und es folgt die allgemeine Beziehung

$$d(x, y) = \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}}{1 - \langle x, y \rangle} \right) \quad x, y \in E. \quad \square$$

Satz 7.5.2: *Es gilt*

$$0 \leq \frac{\sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}}{1 - \langle x, y \rangle} < 1 \Rightarrow d(x, y) \geq 0.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
 |x - y|^2 - |x \times y|^2 &= |x|^2 - 2 \langle x, y \rangle + |y|^2 - x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 \\
 &< |x|^2 - 2 \langle x, y \rangle + 1 - x_1^2 (1 - y_1^2) - x_2^2 (1 - y_2^2) + 2x_1 y_1 x_2 y_2 && \text{weil } y_1^2 + y_2^2 < 1 \\
 &= |x|^2 - 2 \langle x, y \rangle + 1 - |x|^2 + x_1^2 y_1^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 + x_2^2 y_2^2 \\
 &= 1 - 2 \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle^2 = (1 - \langle x, y \rangle)^2
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2} < |1 - \langle x, y \rangle| = 1 - \langle x, y \rangle$$

≥ 0 ist wegen $0 < 1 - \langle x, y \rangle$ klar. \square

Man sieht auch schön: ist ein Punkt (z.B. hier: y) auf dem Einheitskreis S^1 (also ein unendlich ferner Punkt), so gilt das Gleichheitszeichen und somit

$$\frac{\sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}}{1 - \langle x, y \rangle} = 1 \Leftrightarrow d(x, y) \rightarrow \infty.$$

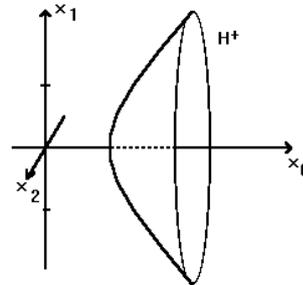
§ 8 Zusammenfassung

8.1 Die Modelle; Geraden, Metriken, Abstandsfunktionen, Isometrien

Das H^+ -Modell: Der Hyperboloid

$$H^+ := \{x \in \mathbb{R}^3; q(x) = 1, x_0 > 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Geraden: nichtleere Schnitte von zweidimensionalen Untervektorräumen mit H^+ .



Metrik: für das Bogenlängenelement ds gilt

$$ds = -dx_0 + dx_1 + dx_2.$$

Abstandsfunktion: für den Abstand zweier Punkte $x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2) \in H^+$ gilt

$$d(x, y) = \operatorname{arcosh}(\sigma(x, y)).$$

Isometrien: die 3×3 -Matrizen

$$f = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{00} > 0, \text{ für die gilt:}$$

$$\begin{aligned} a_{00}^2 - a_{10}^2 - a_{20}^2 &= 1 & a_{00}a_{01} - a_{10}a_{11} - a_{20}a_{21} &= 0 \\ a_{01}^2 - a_{11}^2 - a_{21}^2 &= -1 & a_{01}a_{02} - a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} &= 0 \\ a_{02}^2 - a_{12}^2 - a_{22}^2 &= -1 & a_{00}a_{02} - a_{10}a_{12} - a_{20}a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Das Poincaré'sche Einheitskreisscheibenmodell: Die Einheitskreisscheibe

$$E := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}, \quad \text{oder in der komplexen Darstellung}$$

$$E := \{z = x + iy \in \mathbb{C}; |z| < 1\}.$$

Geraden: Kreisbögen in E , die den Rand von E senkrecht schneiden, oder Durchmesser von E .

Metrik: für das Bogenlängenelement ds gilt (im Komplexen)

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Abstandsfunktion: für den Abstand zweier Punkte $z, w \in E$ gilt:

$$d(z, w) = \ln \frac{|1 - \bar{z}w| + |z - w|}{|1 - \bar{z}w| - |z - w|}.$$

Isometrien: die Möbiustransformationen der Form

$$\varphi(z) = \frac{a\bar{z} + \bar{b}}{b\bar{z} + \bar{a}} \text{ bzw. } \varphi(z) = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}, \text{ mit } a, b \in \mathbb{C}, \det \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} > 0.$$

Sie sind Zusammensetzungen von Inversionen an hyperbolischen Geraden.

Das Poincaré'sche Halbebenenmodell: Die obere Halbebene

$$H^2 := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}, \quad \text{oder in der komplexen Darstellung}$$

$$H^2 := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Geraden: Kreisbögen in H^2 mit Mittelpunkt auf der reellen Achse (Halbkreise), oder Halbgeraden, beginnend an der reellen Achse und senkrecht auf ihr.

Metrik: für das Bogenelement ds gilt (im Komplexen)

$$ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im}(z)}.$$

Abstandsfunktion: für den Abstand zweier Punkte $z, w \in H^2$ gilt

$$d(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}.$$

Isometrien: die Möbiustransformationen der Form

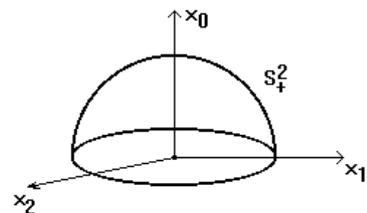
$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ bzw. } \varphi(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}, \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0.$$

Sie sind Zusammensetzungen von Inversionen an hyperbolischen Geraden.

Das Hemisphärenmodell: Die Hemisphäre

$$S_+^2 := \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3; x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1, x_0 > 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

Geraden: nichtleere, und mehr als einen Punkt enthaltende Schnitte von Ebenen senkrecht zur x_1, x_2 -Ebene mit S_+^2 .



Metrik: für das Bogenelement ds , mit dem man die Metrik in S_+^2 erzeugt, gilt

$$ds = \frac{|dx|}{x_0}.$$

Abstandsfunktion: für den Abstand zweier Punkte $x = (x_0, x_1, x_2)$, $y = (y_0, y_1, y_2) \in S_+^2$ gilt

$$d(x, y) = \operatorname{arcosh} \frac{1 - x_1 y_1 - x_2 y_2}{x_0 y_0}.$$

Isometrien: die Abbildungen der Form

$$g(x) = x - 2 \frac{\langle a, x \rangle}{|a|^2}, \quad a = (0, a_1, a_2) \in R^3 \setminus \{0\}, x \in S_+^2,$$

$$g(x) = a + \frac{r^2}{|x - a|^2} (x - a), \quad a = (0, a_1, a_2) \in R^3 \setminus (E \cup S^1), |a|^2 - r^2 = 1, x \in S_+^2$$

und deren Zusammensetzungen. Dies sind Inversionen an Sphären und Ebenen und gleichzeitig Spiegelungen an hyperbolischen Geraden.

Das Klein'sche Modell: Die Einheitskreisscheibe

$$E := \{x = (x_1, x_2) \in R^2; |x| < 1\}.$$

Geraden: Sehnen des Einheitskreises.

Metrik: für das Bogenlängenelement ds gilt

$$ds = \frac{\sqrt{|dx|^2 - (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)^2}}{1 - |x|^2}.$$

Abstandsfunktion: für den Abstand zweier Punkte $x, y \in E$ gilt

$$d(x, y) = \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{|x - y|^2 - |x \times y|^2}}{1 - \langle x, y \rangle} \right).$$

Isometrien: die Abbildungen

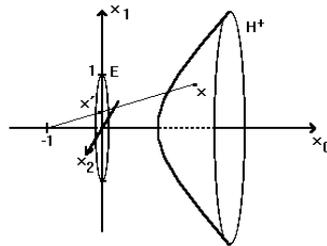
$$\psi(x) = a + \frac{|a|^2 - 1}{1 - 2 \langle a, x \rangle + |a|^2} (x - a), \quad x \in E, a \in R^2, |a| > 1,$$

$$\psi(x) = x - 2 \frac{\langle a, x \rangle}{|a|^2}, \quad x \in E, a \in R^2 \setminus \{0\}$$

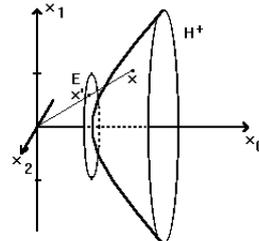
und deren Zusammensetzungen. Dies sind spezielle Geradenspiegelungen, nämlich Polarenspiegelungen.

8.2 Kanonische Projektionen zwischen den Modellen

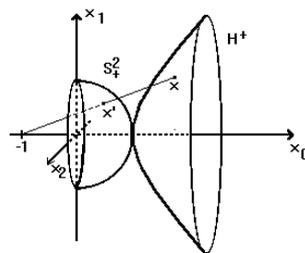
$H^+ \rightarrow E$ (Poincaré-Modell):



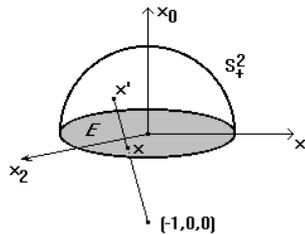
$H^+ \rightarrow E$ (Klein'sches Modell):



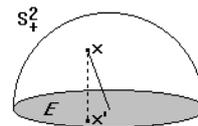
$H^+ \rightarrow S^2_+$:



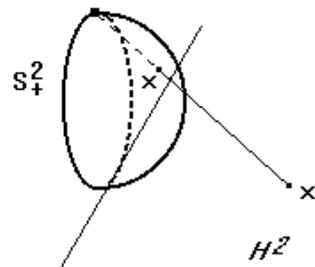
$S^2_+ \rightarrow E$ (Poincaré-Modell):



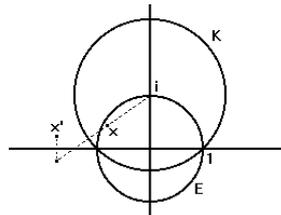
$S^2_+ \rightarrow E$ (Klein'sches Modell):



$S^2_+ \rightarrow H^2$:



$E \rightarrow H^2$:



Literaturverzeichnis

[1]: Beardon, A.F.: „The Geometry of discrete Groups“, Springer-Verlag (1983)

[2]: Freitag E./Busam R.: „Funktionentheorie“, Springer-Verlag (1993)

Weiterführende Literatur:

Zeitler, H.: „Hyperbolische Geometrie“, Bayrischer Schulbuch-Verlag (1970)

Zeitler, H.: „Axiomatische Geometrie“, Bayrischer Schulbuch-Verlag (1971)

Lenz, H.: „Nichteuklidische Geometrie“, BI-Verlag (Bd. 123/123a) (1967)

Coxeter, H.S.M.: „Unvergängliche Geometrie“, Birkhäuser Verlag (1963)

Rosenfeld, B.: „A History of Non-Euclidean Geometry“, Springer-Verlag (1988)

Benedetti, R., Petronio, C.: „Lectures on Hyperbolic Geometry“, Springer-Verlag (1992)

Kunz, E.: „Ebene Geometrie“, Vieweg-Verlag (1976)

Buchmann, G.: „Nichteuklidische Elementargeometrie“, Teubner-Verlag (1975)

Reichhardt, H.: „Gauß und die Anfänge der nichteuklidischen Geometrie“, Teubner-Verlag (1985)

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe, und daß alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Carsten Augat

