

**Aktiv**

**entdeckend**

**lernen**

**Halbschriftliches Addieren und  
Subtrahieren auf der 3. Schulstufe  
nach dem aktiv-entdeckenden Prinzip**

**Verfasser: Dipl.-Päd. VD Korn Franz**

**Akademielehrgang: Lernberater/in Mathematik**

**Themensteller: Mag. Gaidoschik Michael**

**Waldneukirchen, 2007**

## Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Grundkonzeption des aktiv-entdeckenden Lernens</b> .....	<b>2</b>
1.1	Einleitende Überlegungen .....	2
1.2	Wichtige Aspekte des aktiv-entdeckenden Lernens .....	3
1.3	Mathematik in der Wirklichkeit – Mathematik in der Schule oder: Die Entstehung einer „Parallelwelt“ .....	7
1.4	Fazit .....	8
<b>2</b>	<b>Das Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte</b> .....	<b>9</b>
2.1	Einleitende Überlegungen .....	9
2.2	Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren nach dem Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte .....	10
2.3	Übungsformen nach dem Prinzip der kleinen Schritte .....	12
<b>3</b>	<b>Aktiv und entdeckend lernen und üben in der Praxis</b> .....	<b>13</b>
3.1	Einführung in den Tausenderraum .....	14
3.1.1	Schätzen und Zählen .....	14
3.1.2	Bündeln .....	14
3.1.3	Das Tausenderfeld .....	15
3.1.4	Übungen an der Stellenwerttafel .....	16
3.1.5	Kilometer, Meter .....	18
3.2	Halbschriftlich addieren und subtrahieren im Tausenderraum .....	19
3.2.1	Strategien beim halbschriftlichen Addieren .....	19
3.2.2	Strategien beim halbschriftlichen Subtrahieren .....	22
3.2.3	Üben der halbschriftlichen Addition und Subtraktion .....	23
3.3	Zusammenfassende Überlegungen .....	26
<b>4</b>	<b>Der Umgang mit dem Fehler</b> .....	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>Schlussbemerkungen</b> .....	<b>28</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>30</b>
	<b>Quellenverzeichnis der Abbildungen</b> .....	<b>31</b>

## 0 Einleitung

Im Rahmen der Ausbildung dieses Akademielehrganges war Kritik an der gängigen Unterrichtspraxis an österreichischen Schulen sehr häufig ein Thema. Kritik in der Art, „ob nicht manches, was hierzulande Tag für Tag im Rahmen des ‚herkömmlichen‘ Rechenunterrichtes Grundschulern geboten und abverlangt wird, selbst einen wesentlichen Beitrag zum Entstehen von Rechenstörungen leistet.“ (Gaidoschik, 2003)

Dies hat mich als Pädagoge, der ich seit 20 Jahren an einer kleinen Landvolksschule unterrichte und diese seit 10 Jahren leite, am meisten beschäftigt.

Wie erkenne ich sich anbahnende Rechenstörungen bei Kindern? Wie gehe ich mit Kindern, bei denen Rechenschwierigkeiten sich bereits im Unterricht äußern, um? Welche Fördermöglichkeiten bieten sich – bereits in den ersten Unterrichtsmonaten des 1. Schuljahres – an? Welche präventiven Maßnahmen kann ich bereits in dieser Zeit setzen? All das war sehr spannend, interessant und äußerst lehrreich.

Lassen sich diese „neuen“ Ideen und Ansätze von Mathematik-Didaktik aber auch in der Grundstufe II, also der 3. bzw. 4. Schulstufe mit Schülerinnen und Schülern verwirklichen, die bisher „herkömmlichen“ Unterricht erfahren haben?

Lässt sich all das mit den in Österreich zur Verfügung stehenden Lehrbüchern vereinbaren?

Das waren Fragen, die mich – als einen Lehrer, der meist in der Grundstufe II eingesetzt ist – am intensivsten beschäftigten.

Ich wollte im Schuljahr 2006/07 mit meiner 3. Klasse bewusst den einen oder andern ausgetretenen Pfad verlassen und andere Wege einschlagen.

Ich wollte mich selbst aktiv-entdeckend auf meine mathematische Unterrichtsarbeit stürzen und meine mir anvertrauten Schülerinnen und Schüler aktiv Mathematik entdecken lassen, wie es ein Großteil aller renommierten Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktiker heute fordert.

Meine Gedanken und Erfahrungen aus dem abgelaufenen Schuljahr sind zu einem Gutteil Inhalt dieser Arbeit.

Im ersten Kapitel habe ich die theoretische Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens zusammengefasst und erläutert. Im folgenden Kapitel stelle ich dieser die in Österreich immer noch herkömmliche Unterrichtspraxis, das Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte, gegenüber. Im dritten Abschnitt zeige ich am Beispiel der additiven, halbschriftlichen Rechenoperationen, wie man mit einer 3. Schulstufe ganzheitlich, aktiv-entdeckend diese Thematik behandeln könnte. Wie man mit Fehlern – die zwangsläufig geschehen – umgehen müsste, rundet im vierten Abschnitt diese Arbeit ab.

Mir ist bewusst, dass didaktische Maßnahmen niemals „Rezepte mit Wirkungsgarantie sind, sondern eher Wahrscheinlichkeitsaussagen.“  
(*Krauthausen, 2003*)

Mein Ziel war es, „Wahrscheinlichkeiten für besseres Lernen und Lehren zu erhöhen“, und auch da bin ich ganz bei Krauthausen: „Das ist gewiss nicht wenig!“

Im Übrigen sind mit allen im Text verwendeten Personenbezeichnungen stets beide Geschlechter gemeint.

## **1 Grundkonzeption des aktiv-entdeckenden Lernens**

### **1.1 Einleitende Überlegungen**

Seit Jahrzehnten fordert die zeitgenössische Mathematik-Fachdidaktik eine Wende im Sinne eines „aktiv-entdeckenden Lernens“ (*vgl. Wittmann/Müller, 1994; Krauthausen, 1998*). *J. Kühnel*, der bedeutende Rechendidaktiker, wollte bereits am Beginn des vergangenen Jahrhunderts (!) ein geändertes Rollenverständnis von Schülern und Lehrern sehen. In seinem „Neubau des Rechenunterrichts“ (*Kühnel, 1916*), meinte er, dass „Beibringen, Darbieten, Vermitteln Begriffe der Unterrichtskunst vergangener Tage“ seien und wollte demgegenüber den Schülern Kenntnisse und Fähigkeiten nicht beibringen, sondern sie sich selbst erwerben lassen.

Dieser Ansatz, der in der österreichischen Unterrichtspraxis noch kaum Einzug gefunden hat, meint:

- Kinder lernen Mathematik nicht durch Belehrung, nicht dadurch, dass man ihnen mathematische Regeln und Gesetzmäßigkeiten als „Lehrstoff“ vorsetzt,
- sondern indem sie Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten durch eigenes mathematisches Tun im Idealfall selbst entdecken (*vgl. [www.rechenschwaeche.at](http://www.rechenschwaeche.at)*).

Insofern ist „aktiv entdeckendes Lernen“ ein Pleonasmus, wie der „weiße Schimmel“, da sich jedes Kind mathematische Inhalte selbst erarbeiten muss: Wirkliches Lernen kann immer nur aktiv entdeckend sein (*vgl. Gaidoschik, 2003*).

Kinder brauchen daher keine Tipps und Tricks, um ein unverstandenes mathematisches Regelwerk im schulischen Alltag zu bewältigen. Vielmehr müssen im Unterricht Rahmenbedingungen und Lernumgebungen geschaffen werden, die aktiv-entdeckendes Lernen möglich machen und unterstützen (*vgl. Schmassmann, 2003*).

## **1.2 Wichtige Aspekte des aktiv-entdeckenden Lernens**

- **Gesamtstrukturen offen legen**

Für alle Schülerinnen und Schüler ist es enorm wichtig, sich einen Überblick über mathematische Strukturen und Zusammenhänge zu verschaffen. Mathematik besteht nicht aus einer Vielzahl von Einzelfaktoren und sollte daher auch nicht so aufgefasst werden.

Wenn Umwandlungen, Malaufgaben, Plusrechnungen, etc. einzeln und ohne sichtbaren Zusammenhang angeboten werden, bleiben sie – insbesondere für Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten –

unfassbar und können, wenn überhaupt, nur mit erheblichem Aufwand automatisiert werden (vgl. Schmassmann, 2003).

*„Das Lernen von einzelnen Fakten oder Ereignissen ist (...) meist nicht nur nicht notwendig, sondern auch ungünstig.“  
(Spitzer, 2002)*

- **Lernen auf eigenen Wegen, operatives Lernen**

Die Lehrkraft sollte Kinder dazu ermutigen, eigene Lösungswege zu gehen, eigene Strategien zu entwickeln, anstatt vorgegebene „Lernwege“ einzufordern. Natürlich dürfen die Kinder dabei nicht allein gelassen werden. Sie brauchen manchmal Beratung, Unterstützung, jedenfalls Rückmeldungen über die Qualität ihrer gewählten Wege oder Veranschaulichungen. Aber nur so kann Verständnis von Regeln oder Strategien gewährleistet werden.

- *„Kinder denken anders, als wir Erwachsene denken, anders, als wir es vermuten, und anders, als wir es gerne hätten.*
- *Kinder denken aber auch anders als andere Kinder und in manchen Situationen anders als in anderen, obwohl sie im Prinzip dem gleichen Problem gegenüberstehen.“  
(Spiegel/Selter 2003)*

Lernen nach operativen Gesichtspunkten ist am einfachsten auch so erklärt: Lernen in der Art und Weise wie kleine Kinder lernen. Sie erfahren ihre Umwelt, indem sie mit ihr umgehen, Dinge angreifen, in den Mund nehmen, zerreißen, usw. Später kommen durchaus auch bereits Gedankenexperimente hinzu und nicht alles muss nur mehr ausschließlich handelnd erfahren werden. Im Zentrum steht immer die Frage: „Was passiert, wenn ich ...?“ Dies erfordert eine aktive Grundhaltung, was uns zum aktiv-entdeckenden Lernen führt.

Die Volksschule nimmt hier eine Schlüsselposition ein, da die Kinder quasi von Natur aus mit viel Neugier und Willen ausgestattet in die Schule kommen. Diese operative, aktive Grundeinstellung gilt es tunlichst zu wahren und zu fördern und nicht zu bremsen oder zu hemmen.

- **Begleitung des Lernprozesses durch strukturierte Veranschaulichung**

Den Schülerinnen und Schülern müssen geeignete Materialien zur Verfügung gestellt werden, über deren Zweck- und Unzweckmäßigkeit reflektiert werden muss. Veranschaulichungen und Materialien führen nicht automatisch zum Verständnis – sie müssen entdeckt, erkundet und erarbeitet werden (vgl. Schmassmann, 2003). Darüber hinaus können so gut wie alle Arbeitsmaterialien „richtig“ oder „falsch“ eingesetzt werden. Daher gibt es auch nicht das richtige, sondern allenfalls richtig verwendetes Anschauungsmaterial. Auf keinen Fall darf es Selbstzweck werden. Zur Loslösung sollte immer wieder ermuntert werden.

- **Produktives Üben**

Dass dem Üben im Mathematikunterricht eine wesentliche Bedeutung zukommt, versteht sich von selbst. Im Sinne des aktiv-entdeckenden Lernens werden aber über die traditionellen Übungsformen hinaus produktive Übungen benötigt (vgl. Wittmann/Müller, 1994). Produktive Übungsformen sind Übungen, bei denen nicht nur Wissen und Fertigkeiten im Zentrum stehen, sondern wo auch allgemein mathematische Lernziele, wie

- Situationen in die Sprache der Mathematik übersetzen, Ergebnisse interpretieren
- Situationen erforschen, Beziehungen entdecken, kreative Ideen entwickeln
- mathematische Sachverhalte begründen
- mathematische Sachverhalte mündlich und schriftlich beschreiben

verfolgt werden.

Solche Übungsformate, mit denen die Kinder – ganz im traditionellen Sinn – rechnen, darüber hinaus aber auch Muster, Gesetzmäßigkeiten und Auffälligkeiten beschreiben und erklären können, sind etwa:

- **Schöne Päckchen** (vgl. Wittmann/Müller, 1994)

Dies sind Aufgabenpäckchen, die nicht willkürlich zusammengestellt sind, sondern denen eine bestimmte Gesetzmäßigkeit innewohnt, die von den Schülern entdeckt, erkannt, erklärt, weiterbearbeitet werden kann. Wenn den Kindern dieses Format einmal bekannt ist, können in die „schönen Päckchen“ Fehler eingebaut werden, die gefunden werden sollen, die Päckchen weiter gebildet werden oder von den Kindern eigenständig neue Päckchen erfunden werden. Entscheidend ist – wie immer – das Gespräch über die Beziehungen, die in den Aufgaben dieser Päckchen stecken. Ein Beispiel dafür zeige ich im Abschnitt 3.2.3 auf Seite 23.

- **Rechenmauern**

Rechenmauern sind so aufgebaut, dass auf je zwei benachbarte Steine einer Schicht ein Stein gesetzt wird, in den immer die Summe der beiden unteren Steine einzutragen ist. Besonders vorteilhaft bei diesem Übungstyp ist, dass Additions- und Subtraktionsaufgaben sinnvoll aufeinander bezogen sind. Außerdem lassen sich Rechenmauern sehr leicht operativ variieren (vgl. Wittmann/Müller, 1994).

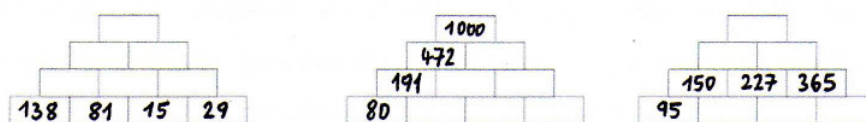


Abb. 1.: Rechenmauern

- **Rechendreiecke** (vgl. Wittmann/Müller, 1994)

Hier werden zwei benachbarte Felder addiert und das Ergebnis an der jeweiligen Dreiecksseite mittig hingeschrieben. Durch gezielte Auswahl der inneren und äußeren Zahlen können Additions- und Ergänzungsaufgaben geübt werden. Wenn nur die äußeren Zahlen gegeben sind, müssen die Kinder „herumprobieren“, was sie – meiner Erfahrung nach – liebend gerne tun.



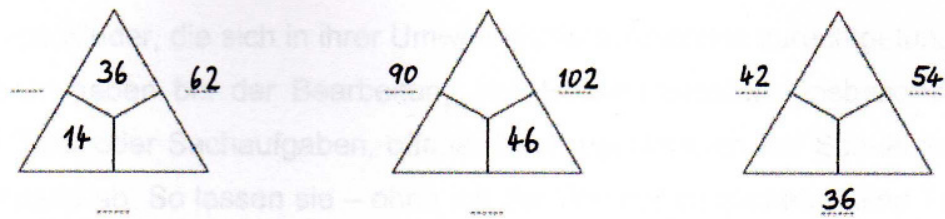
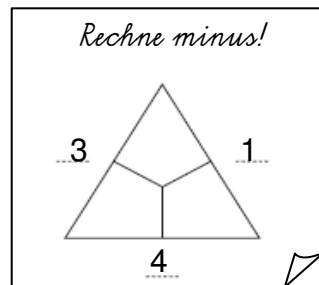


Abb. 2.: Rechendreiecke

Wie kreativ Kinder mit solchen Dreiecken umgehen, zeigte mir Victoria aus meiner 3. Klasse. Den Auftrag, ein Rechendreieck für ihre Mitschüler zu erfinden, löste sie folgendermaßen:



**Anmerkung:** Wir hatten im Unterricht nie zuvor Rechendreiecke mit Subtraktionsvorgabe gemacht. Diese Idee kam alleine von Victoria.

Als Hilfestellung gab sie noch an, dass alle inneren Zahlen größer als 10 seien. Nun wurde eifrig herumprobiert, bis ein Mitschüler einen ersten Lösungsvorschlag hatte: 17, 14 und 13 ( $17 - 14 = 3$ ,  $14 - 13 = 1$ ,  $17 - 13 = 4$ ). Allgemeine Bewunderung – nur Victoria meinte, sie hätte eigentlich an andere Zahlen gedacht: 21, 18 und 17. In der nun folgenden Diskussion stellten wir fest, dass es natürlich jede Menge Lösungen zu Victorias Rechendreieck gab, man musste nur eine mögliche Lösung gleichmäßig verändern (um +1, -1, usw.), was eigentlich dem Monotoniegesetz der Subtraktion entspricht.

Eine Reihe weiterer Übungsformate – wie Streichquadrate, Zahlenketten und viele mehr – sind in der Fachliteratur beschrieben. Die oben erwähnten habe ich in der Praxis erfolgreich erprobt.

### 1.3 Mathematik in der Wirklichkeit – Mathematik in der Schule oder: Die Entstehung einer „Parallelwelt“

Unter Berücksichtigung dieser unter 1.2 erwähnten Aspekte ist es auch möglich, einem Phänomen entgegenzutreten, das sicher jeder Lehrer

schon einmal beobachten konnte. Völlig normal entwickelte 8- bis 10-jährige Kinder, die sich in ihrer Umwelt bisher problemlos zurechtgefunden haben, geben bei der Bearbeitung von Rechenaufgaben, insbesondere bei Text- oder Sachaufgaben, offensichtlich bei Betreten der Schule ihren Verstand ab. So lassen sie – ohne mit der Wimper zu zucken – eine Tafel Schokolade auch einmal einige hundert Euro kosten, den Lehrer oder die Lehrerin 4 m 20 cm groß und den Schulweg 135 km lang sein. Dies alles möglicherweise in schönster Schrift, färbig und doppelt unterstrichen. Dieselben Kinder können aber durchaus ihr Taschengeld sinnvoll verwalten und würden im „wirklichen Leben“ kaum solche unsinnigen Antworten geben. Mein Eindruck ist, dass sich manche Kinder im Laufe ihrer Schullaufbahn eine Art „Parallelwelt“ errichten. Sie haben offensichtlich gelernt, dass Rechenaufgaben (in der Schule!) immer eine, und zwar genau eine Lösung haben und diese vom Lehrer als richtig oder falsch klassifiziert wird, aber sie haben nicht gelernt, Lösungen kritisch zu hinterfragen. Sie haben gelernt, dass bei Text- oder Sachaufgaben mit den vorkommenden Zahlen irgendetwas gerechnet werden muss, dass es eine Frage, eine Rechnung und eine Antwort geben muss. Kritischer Umgang mit dem Text gehört nicht zu ihrem gelernten Verhalten. Wie auch! Wenn Textaufgaben meist nur im Anschluss an die Erarbeitung etwa einer Rechenart gestellt werden, wenn Rechenbücher seitenweise Textaufgaben zu einer bestimmten Rechenart anbieten, warum sollte das Kind bei der dritten Aufgabe, bei der wieder multipliziert werden muss, nachdenken? Der Auftrag lautet ja offenbar, du musst rechnen und nicht, du musst nachdenken.

## **1.4 Fazit**

Es ist nun festzuhalten: Unterricht nach dem Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens weist dem Schüler hauptsächlich die Rolle des Forschers zu. Dabei sollte die Aufgabenstellung oder Lernsituation folgenden Kriterien entsprechen:

- Bedeutsamkeit für das Kind, Herausforderung, Attraktivität
- Lehrplanrelevanz
- Möglichkeit der Entwicklung von Selbst- und Sozialkompetenz
- Auf Grundlage von vorhandenen Kenntnissen bzw. Fertigkeiten machbar
- Möglichkeit zu Lerngruppengesprächen
- Auswertung, Festhalten von Erkenntnissen

Der wesentliche Unterschied zum traditionellen Rechenunterricht ist, dass nicht nach Plan Schritt für Schritt quasi eine Mauer errichtet wird, wobei tunlichst darauf geachtet wird, keinen Stein auszulassen, damit die Mauer nicht zusammenstürzt, sondern dass Kinder selbst ein Netz aus Wissen und Fertigkeiten knüpfen, wobei Lücken im Laufe des Lernprozesses geschlossen werden können.

In der Natur des Lernens liegt Individualität. Deshalb ist es nicht möglich, klein- und gleichschrittig alle Kinder auf demselben Weg in derselben Zeit voranzubringen. Die Kinder sind von der Lehrkraft zu begleiten, die darauf achten soll, dass am Ende des Lernprozesses gemeinsames Wissen und entsprechende Fähigkeiten vorhanden sind, die natürlich von verschiedenen Kindern unterschiedlich beherrscht werden.

## **2 Das Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte**

### **2.1 Einleitende Überlegungen**

Dieses Lernkonzept beruht darauf, dass der Lernstoff in kleine und kleinste Häppchen zerlegt wird, um dann den Kindern in „homöopathischen Dosen“, isoliert voneinander verabreicht zu werden. In den meisten mir bekannten österreichischen Rechenbüchern erfreut sich dieses Prinzip großer Beliebtheit. So werden seitenweise Aufgaben eines bestimmten Typs Schritt für Schritt eintrainiert. Die Kinder sollen offensichtlich auf eine bestimmte Aufgabe in einer ganz bestimmten Art und Weise reagieren. Weitere gleichartige Aufgaben werden immer

wieder vorgelegt, wobei mit Lob oder Kritik auf die gewünschten Antworten hingearbeitet wird.

## 2.2 Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren nach dem Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte

Ein gängiges österreichisches Mathematiklehrwerk für die 3. Schulstufe führt das halbschriftliche Rechnen im Zahlenraum 1000 in folgender Art und Weise ein:

Seite im Rechenbuch	„Typus“	Beispiel
28	$H \pm H$	$300 + 500, 700 - 300$
46	$H + Z, HZ - Z$	$300 + 60, 340 - 40$
47	1. $H + . = T$ 2. $H + . = HZ$ 3. $HZ + . = H$ 4. $HZ + . = HZ$	$500 + \underline{\quad} = 1000$ $300 + \underline{\quad} = 350$ $320 + \underline{\quad} = 400$ $350 + \underline{\quad} = 380$
52	$HZ \pm H$	$420 + 100, 480 - 100$
54	$HZ \pm HZ$ ohne HÜ <sup>1)</sup>	$540 + 350, 680 - 350$
58	$Z + Z ; HÜ$	$80 + 40$
59	1. $H - . = Z$ 2. $HZ - . = H$ 2. $HZ - Z$ (HU <sup>2)</sup> )	$100 - \underline{\quad} = 80,$ $120 - \underline{\quad} = 100$ $120 - 50$
60	$HZ + Z$ mit HÜ	$180 + 40$
61	$HZ - Z$ mit HU	$230 - 40$
62	$HZ + HZ$ mit HÜ	$170 + 140$
63	$HZ - HZ$ mit HU	$530 - 380$

<sup>1)</sup> Hunderterüberschreitung      <sup>2)</sup> Hunderterunterschreitung

Erst ab Seite 66 wird am Stellenwertverständnis gearbeitet, eine Stellenwerttafel eingeführt und die Begriffe Einer, Zehner, Hunderter geklärt. Auf Seite 69 findet man in der Fußzeile den Kommentar: „Anbahnen des Verständnisses für den dekadischen Zahlenaufbau.“

Die Frage stellt sich, auf Grundlage welchen Verständnisses die Kinder die Aufgaben von Seite 28 bis 64 lösen sollten.

Diese Vorgehensweise – so weit verbreitet sie auch ist – erscheint mir in etwa so sinnvoll, als würde man das Autofahren Schritt für Schritt gemäß

folgendem Ausbildungslehrplan vermittelt bekommen (*Spiegel/Selter, 2003*):

- 1. Stunde:** *Ein- und Aussteigen üben, zuerst ohne, dann mit öffnen und schließen der Tür; relevante Instrumente (Lenkrad, Gaspedal, Bremse, etc.) kennen lernen*
- 2. Stunde:** *Zunächst umdrehen des Zündschlüssels, dann üben des Tretens des Gaspedals; schließlich Koordination dieser beiden Aktivitäten, mit dem Ziel, den Motor anzulassen; einprägen von Namen und Funktionen der wichtigsten Instrumente*
- 3. Stunde:** *Wiederholung des Ein- und Aussteigens mit Türbetätigung sowie des Anlassens des Motors; üben des Geradeausfahrens (nicht schneller als 15 km/h) und des Bremsens*
- 4. Stunde:** (...)

Hier braucht man kaum weiterzudenken. Es ist offensichtlich Unsinn, auf diese Art und Weise das Autofahren zu lernen. Eine komplexe Tätigkeit erlernt man nicht Schritt für Schritt in extrem vereinfachten Situationen, sondern in hinreichend herausfordernden Umgebungen.

So ist es auch mit Mathematik. Dieses kleinstschrittige Vorgehen ist sogar kontraproduktiv, da es ja genau das, worauf es eigentlich ankommt, nicht – oder erst zu spät – thematisiert, nämlich (in unserem Beispiel) das Nachdenken über Stellenwert, über Hunderter, Zehner und Einer.

In obigem Beispiel kommt noch erschwerend hinzu, dass bei jedem Schritt genau eine Strategie (als die offensichtlich für einzig sinnvoll erachtete) angeboten und in einem Musterbeispiel vorgeführt wird. Genau das also, wovor Mathematikdidaktiker warnen. Kinder sollen nämlich, sofern sie die Voraussetzungen – hier ein tragfähiges Stellenwertverständnis – haben, mit dreistelligen Zahlen rechnen und sich erst einmal an keine Vorschriften halten müssen, um eigene Strategien entwickeln zu können. Und es sind unterschiedliche Rechenwege denkbar, was ich im Kapitel 3.2 zeigen möchte.

## 2.3 Übungsformen nach dem Prinzip der kleinen Schritte

Beliebte Übungsformen, die in beinahe allen Mathematikbüchern der Volksschule und in einer Unzahl von Kopiervorlagen in den Lehrmittelschränken der Schulen zu finden sind, werden in der Literatur oft als „bunte Hunde“ (vgl. *Radatz/Schipper, 1983*) bezeichnet. Sie wurden entwickelt, um den Kindern das unvermeidbare Üben „schmackhafter“ zu machen. Ob es sich nun um Rechensterne, Rechenblumen, Ausmalbilder, Puzzles, Aufgabenkärtchen für Setzleisten usw. handelt, sie alle sind nach dem gleichen Muster gestrickt. Gleichartige Aufgaben, die willkürlich zusammengesetzt sind (d.h. jede Aufgabe könnte durch eine andere gleichartige Aufgabe ersetzt werden), müssen gelöst werden. Die Ergebnisse werden durch einen Kontrollmechanismus überprüft, etwa in der Art, dass die Lösungen in den Feldern eines Ausmalbildes zu suchen und dort „als Belohnung“ zu bemalen sind. Dies wird in der Regel als „Selbstkontrolle“ bezeichnet.

Nun ist der Einsatz solcher Materialien im Einzelfall durchaus vertretbar. Beschränkt sich das Üben aber auf die Bearbeitung solcher „bunter Hunde“, muss dies doch aus didaktischer Sicht kritisch hinterfragt werden. Da es sich in den allermeisten Fällen um beziehungslose Aufgabenserien handelt, werden hier Kenntnisse bzw. Fähigkeiten trainiert, die so in der realen Lebenswelt des Kindes (und auch des Erwachsenen) nicht vorkommen. Wieder wird das Entstehen einer „Parallelwelt“ eher gefördert als vermieden. Rechnen und Denken stehen hier in keinem direkten Zusammenhang. Werden die Aufgaben nur leicht variiert, können sie den Schüler völlig verwirren.

Die Vorgabe von motivierend verpackten Ergebnissen stellt auch keine echte Selbstkontrolle dar, denn das Kind wird kaum in die Situation gebracht, über das „Wie?“ oder „Warum?“ nachzudenken. Eher wird es passiv abwarten und die Verantwortung über die Richtigkeit der Lösungen an den Lehrer bzw. die Lehrerin abgeben. Die Fähigkeit, selbst für sein mathematisches Tun Verantwortung zu übernehmen – man könnte analog zum Begriff „Rechtschreibgewissen“ hier von „Rechengewissen“ sprechen

– wird, wenn überwiegend diese Art von Übungspraxis vorherrscht, nicht befördert.

Meiner Meinung nach sind diese Übungsformen auch nicht besonders effektiv, da ja nur ganz bestimmte, stereotype Aufgaben trainiert werden. Daher können die Kinder auch kein Beziehungsgeflecht knüpfen, keine Gesetzmäßigkeiten und Strukturen erforschen oder entdecken. So müssen solcherart geübte Kenntnisse und Fähigkeiten auch immer wieder aufgefrischt und wiederholt werden.

Schülerinnen und Schüler, die nur daran gewöhnt sind, in diesem Sinn kleinschrittig zu lernen und zu üben, können nur sehr schwer die Fähigkeit entwickeln, Aufgaben zu lösen, wo gerade **nicht** vorgegeben ist, was zu rechnen ist (vgl. Wittmann, 1994).

### **3 Aktiv und entdeckend lernen und üben in der Praxis**

*Von grundsätzlich anderer Qualität als das kleinschrittige Lernen und Üben ist das Lernen und Üben nach den Prinzipien des aktiven und entdeckenden Lernens: Die einzelnen Lernabschnitte sind großzügiger bemessen und schaffen Sinnzusammenhänge, aus denen heraus sich für die Schüler vielfältige Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus ergeben. Durch den Lehrer angeregt und auf bestimmte Ziele hingelenkt erarbeiten sich die Schüler bestimmte Fertigkeiten, Wissens Elemente und Lösungsstrategien. Die Diskussion der Ideen und Überlegungen der Schüler in der Klasse wird dabei genutzt, um zunächst unvollkommene Ansätze der Schüler weiterzuentwickeln. Geübt wird ebenfalls in sinnvollen Zusammenhängen. (Wittmann, 1994)*

Dieser Absatz beschreibt sehr treffend, worum es beim aktiv-entdeckenden Lernen geht. Mathematik wird durch eigenes Tun, Entdecken und Erfahren weit wirksamer gelernt als durch Belehrung. Lerninhalte müssen also so aufbereitet werden, dass Schülerinnen und Schüler sie aktiv erforschen können. So wird es auch möglich, eine persönliche Beziehung zu Mathematik aufzubauen.

Wenn ich im vorangegangenen Kapitel den Aufbau des halbschriftlichen Rechnens nach dem Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte kritisiert

habe, so möchte ich nun zeigen, wie ein möglicher Ablauf der additiven halbschriftlichen Rechenverfahren auf der 3. Schulstufe aussehen könnte.

### **3.1 Einführung in den Tausenderraum**

Da für das halbschriftliche Rechnen im Tausenderraum natürlich ein tragfähiges Stellenwertverständnis Voraussetzung ist, muss in einem ersten Schritt an diesem nachhaltig gearbeitet werden.

#### **3.1.1 Schätzen und Zählen**

Als Einstieg in die Thematik könnten anhand eines Bildes einer großen



Abb 3.: Strand: Schätzen und zählen (verkl.)

unstrukturierten Menschenmenge (Sportstadion, Strand, etc.) die Kinder aufgefordert werden, erst einmal zu schätzen, wie viele Leute zu sehen sind, danach möglichst genau

zu zählen. Analog könnten Knöpfe, Bohnen usw. in einer Dose in der Klasse geschätzt und dann in Gruppen ausgezählt werden. Die Kinder sollen ja Größenvorstellungen im Tausenderraum entwickeln, so ist zur Überprüfung der Schätzung strukturiertes Zählen notwendig, da sich dieser Zahlenraum anders nicht erfassen lässt. Die Schätzstrategien der Kinder werden nun im Unterricht natürlich thematisiert und auf weitere Schätzaufgaben in der näheren Umgebung ausgeweitet.

#### **3.1.2 Bündeln**

Hier geht es um die systematische Erarbeitung der Zehnerbündelung und der Stellenwertschreibweise mit Hundertern, Zehnern und Einern. Die



Tausenderstruktur ist ja für den weiteren Zahlaufbau von zentraler Bedeutung. Da der Bündelungsgedanke **der** wesentliche Gedanke des Stellenwertsystems ist, muss ihm natürlich entsprechende Aufmerksamkeit geschenkt werden. In der 3. Schulstufe sollte bereits auf Einsichten im Bereich „Zehner-Einer“ aus der 2. Schulstufe aufgebaut werden können, oder aber sie müssten jetzt nachgearbeitet werden. Dies hier im Detail auszuführen, würde den Rahmen der Arbeit sprengen.

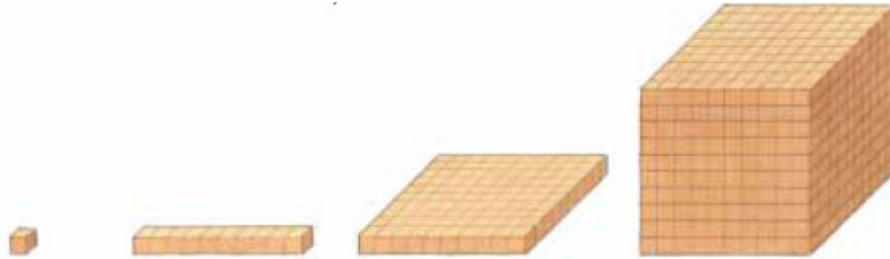


Abb 4.: Geeignetes Material für den Zahlaufbau, da maßstabsgetreue Darstellung: Einer-Würfel, Zehner-Stange, Hunderter-Platte, Tausender-Würfel

Nur soviel: Ich lasse eine Anzahl kleinerer Gegenstände (Systemmaterial) zur Anzahlbestimmung bündeln. Zum besseren Verständnis und auch um das Prinzip klar zu machen, sollten mindestens ein Hunderter (besser mehrere), zwei (oder mehrere) Zehner und einige Einer gebündelt werden. Wesentlich scheint mir jedenfalls die Anmerkung, dass oft erst das Entbündeln in Aufgabenstellungen wie  $50 - 3$ ,  $400 - 20$  usw. manche Kinder von der Notwendigkeit des Tausches (Zehner in Einer, Hunderter in Zehner) überzeugt (vgl. *Gaidoschik, 2002*).

### 3.1.3 Das Tausenderfeld

Zur ganzheitlichen Einführung und Durchdringung des Tausenderraumes erhalten alle Kinder ein Tausenderfeld (vgl. *Wittmann/Müller, 1994*), an dem sie erkennen, dass der Tausender aus zehn Hunderterfeldern besteht. Jetzt lassen sich Zahlen von 0 bis 1000 durch Abdecken mit zwei quadratischen Notizzetteln (10 x 10 cm) zeigen.

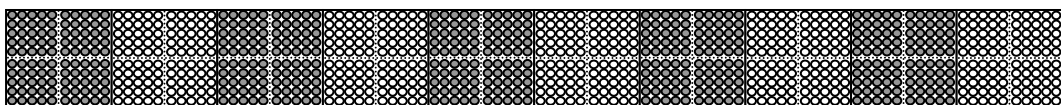


Abb. 5: Tausenderfeld (Originalgröße siehe Anhang)

Ich bitte nun die Kinder, möglichst viele Rechnungen mit dem Ergebnis 1000 aufzuschreiben. Erfahrungsgemäß kommen hier sehr unterschiedliche Aufgaben zustande, die die Kinder am Tausenderfeld auch erklären können. Dies gibt mir einen wichtigen Hinweis auf das Vorwissen der Kinder.

Gezeigte Zahlen werden nun gelesen, zeichnerisch dargestellt, zeichnerische Darstellungen gedeutet (wobei darauf zu achten ist, keine Schematisierungen einzuführen, wie: immer die Hunderter ganz links, Zehner in der Mitte, Einer rechts).



Abb. 6: Zeichnerische Darstellung dreistelliger Zahlen

Überhaupt kommt es in dieser Situation häufig dazu, dass die Kinder wissen möchten, wie es nach 1000 weitergeht. Es spricht nun – ganz im Gegenteil – gar nichts dagegen, im Sinne der „Zone der nächsten Entwicklung“ (*Vigotsky, zit. nach Krauthausen, Scherer, 2001*) einen ersten Ausblick etwa zur Million oder sogar darüber zu wagen. Die Tausenderstruktur, die im Tausenderraum so ja nur einmal auftritt, wird im erweiterten Zahlenraum nur klarer ersichtlich.

### 3.1.4 Übungen an der Stellenwerttafel

Nun kommt ein grundlegendes Darstellungsmittel, auf das insbesondere bei Einführung der schriftlichen Rechenverfahren wieder zurückgegriffen wird, zum Zug – die Stellenwerttafel. Die Kinder sollen Plättchen-darstellungen in Zahlen und umgekehrt übersetzen. Außerdem wird ein flexibler Umgang mit Zahlen gefördert. Hier handelt es sich um einen ersten wichtigen Abstraktionsschritt, da sich die Plättchen in Größe und Form nicht voneinander unterscheiden, sondern nur durch ihre Lage (in H, Z oder E-Spalte) verschiedene Bedeutungen erhalten. Meinen Kindern fiel dieser Schritt heuer nicht sonderlich schwer, möglicherweise muss für manche Kinder ein Zwischenschritt einkalkuliert werden (etwa das Legen

von Zahlen mit H-Platten, Z-Stangen und E-Würfeln in die Stellenwerttafel).

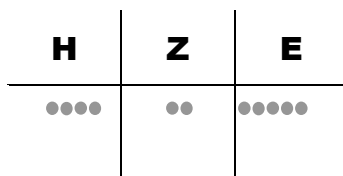


Abb. 7: Stellenwerttafel

Ich lege also an der Magnettafel mit Plättchen verschiedene Zahlen, die von den Kindern benannt und auch aufgeschrieben werden. Durch

Verschieben, Wegnehmen und Hinzufügen von Plättchen werden immer neue Zahlen gebildet. Nach einer kurzen Kennenlernphase können die Kinder nun selbständig (in Partner- oder Gruppenarbeit) solche Aufgaben behandeln, wobei vermutlich Probleme auftauchen (wenn nicht, provoziere ich sie sogar). Etwa:

- Was passiert, wenn mehr als 9 Plättchen etwa bei den Zehnern zu liegen kommen?
- Was passiert, wenn an einer Stelle keine Plättchen liegen?

Hier gilt wieder, keine vorschnellen Lösungen anzubieten, sondern die Kinder selbst überlegen zu lassen: „Was denkt ihr?“

In einem weiteren Schritt bekommen die Kinder Aufgabenstellung in der Art:

- a) Lisa hat die Zahl 472 gelegt. Matthias legt ein Plättchen dazu. Welche Zahlen können es jetzt sein?
- b) Sabine hat die die Zahl 871 gelegt. Romana verschiebt ein Plättchen. Welche Zahlen können es jetzt sein?
- c) Welche Zahlen kannst du mit einem einzigen Plättchen legen?
- d) Welche Zahlen kannst du mit zwei Plättchen legen?
- e) Welche Zahlen kannst du mit drei Plättchen legen?

Solche Übungen sind von grundlegend anderer Qualität, als lange Stellenwerttabellen, die nach einem bestimmten Schema bearbeitet werden müssen, wie sie sehr häufig in Mathematikbüchern anzutreffen sind.

Daran schließen nun Zahlenvergleiche (größer – kleiner), das Finden von Nachbarzahlen und Ergänzungsübungen zum nächsten Hunderter und auch auf 1000 an. Bei letzteren Übungen bieten sich transparente Abdeckkärtchen (die ich aus Aktenhüllen herstelle) zum Tausenderfeld sehr gut als Hilfsmittel an.

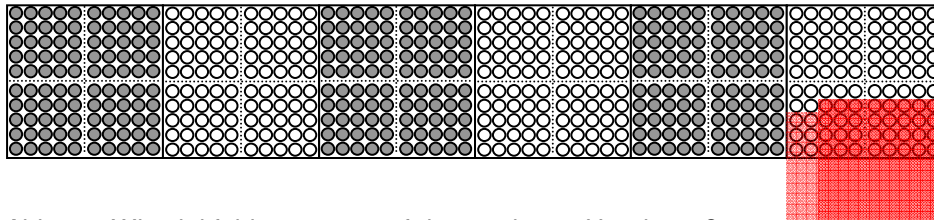


Abb.8: Wie viel fehlt von 562 auf den nächsten Hunderter?

### 3.1.5 Kilometer, Meter

An dieser Stelle bietet sich nun etwa die Einführung des Längenmaßes „Kilometer“ in seiner Beziehung zum „Meter“ an. Der Begriff „Kilometer“ ist den Schülerinnen und Schülern so gut wie immer geläufig, realistische Vorstellungen von der Längenbeziehung  $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$  sind allerdings praktisch kaum vorhanden.

In Umfeld der Schule muss ein einigermaßen gerader, verkehrsarmer Weg von mindestens 1 km Länge gefunden werden, der mit den Kindern gefahrlos „erwandert“ werden kann und ihnen idealerweise bekannt ist. Ein Stück Schnur oder Spagat wird mit den Kindern auf  $10 \times 10 \text{ m}$  (also 100 m) abgeschnitten, dieses kann nun fortgesetzt abgewickelt werden.

Vom Ausgangspunkt werden nun im Abstand von 100 m Entfernungskärtchen, die zuvor hergestellt worden sind, angebracht. Nicht vergessen darf man, die Kinder vorher schätzen zu lassen, wie weit wir kommen, wenn wir unsere 100-m-Schnur 10-mal abgewickelt haben. Erfahrungsgemäß liegen die Schätzungen weit unter einem Kilometer, selbst dann, wenn die Kinder die Schnur in der Klasse selber hergestellt haben. Umso größer ist das Erstaunen bei den Kindern, wie lange ein Kilometer wirklich ist und entsprechend groß auch der Lernertrag. Nachhaltig wird hier an

der Sachrechnenkompetenz der Kinder gearbeitet, da sie nun über eine zumindest einigermaßen sichere Größenvorstellung verfügen.

Der Rückweg kann nun in normaler Wandergeschwindigkeit zurückgelegt werden und dabei die Zeit bestimmt werden, die man für 1 km etwa benötigt. Die Kinder erfahren, dass man für 1 km etwa 20 Minuten, für 500 m etwa 10 Minuten und für 250 m etwa 5 Minuten braucht. So entstehen erste Modellvorstellungen von Weg und Zeit, die bei Schätzaufgaben dringend nötig sind:

- Wie lange brauche ich für meinen Schulweg?
- Wie lang ist er daher ungefähr?
- Wie lange braucht ein Radfahrer für einen Kilometer?

Wenn während der Wanderung einige Schüler an den 100-m-Markierungen auffällige Objekte (Bäume, Häuser, Marterl, ...) notiert haben, kann dies nun abschließend an einem Papierstreifen festgehalten werden. Querverbindungen zum Sachunterricht bieten sich hier in Hülle und Fülle an.

Ergänzungsaufgaben (Ergänze auf 1 km!) können die Kinder nun selbständig bearbeiten und so erkennen, mit Längen(maßen) kann ich genauso rechnen wie mit Zahlen.

Kinder, mit denen so an dieses wichtige Thema herangegangen wurde, wandeln auch nach einigem Zeitabstand kaum 1 km in 100 m um, was man sonst auch in der 4. Schulstufe noch sehr oft beobachten kann. Ich spreche hier tatsächlich aus Erfahrung, da ich diese Art der „Kilometer-erarbeitung“ seit über 10 Jahren sehr erfolgreich praktiziere.

### **3.2 Halbschriftlich addieren und subtrahieren im Tausenderraum**

Beim halbschriftlichen Rechnen handelt es sich im Prinzip um ein geschicktes Zerlegen von Rechenaufgaben in leichtere Teilaufgaben. Rechenschritte und Teilergebnisse können nach Bedarf festgehalten

werden. Nach einer ersten „Erkundungsphase“, in der ich den Kindern keinerlei Vorgaben – auch nicht formale – mache, einigen wir uns schließlich darauf, unter die Aufgabe einen Strich zu ziehen und somit Nebenrechnungen, Hilfsaufgaben und Rechenwege von der Ausgangsaufgabe abzugrenzen. Zwischenergebnisse setzen wir nach dem Gleichheitszeichen. Ich mache den Kindern aber deutlich, dass es sich hierbei ausschließlich um eine Vereinbarung in unserer Klasse handelt, damit andere Kinder und ich Rechenwege und Strategien besser nachvollziehen können. So können die Kinder immer aber auch selbst entscheiden, wie viele Nebenrechnungen sie durchführen. Manche Kinder rechnen dann immer mehr im Kopf, andere notieren jeden Rechenschritt.

### 3.2.1 Strategien beim halbschriftlichen Addieren

Anhand der Beispielaufgabe  $347 + 256$  lasse ich nun die Kinder ihre Lösungsmöglichkeiten entwickeln und entsprechend notieren. Zum Großteil wird dabei auf Kenntnisse aus dem 2. Schuljahr zurückgegriffen. Manche Kinder verwenden überhaupt kein Material, andere greifen auf Strukturmaterial oder die Tausenderfelder zurück. Dabei stelle ich den Kindern bewusst die Unterrichtsorganisationsform (Einzelarbeit, Partnerarbeit, Gruppenarbeit) frei, da ich die Erfahrung gemacht habe, dass manche Kinder in solchen Erarbeitungsphasen gerne zu zweit oder zu dritt arbeiten, andere aber lieber alleine an die gestellte Aufgabe herangehen.

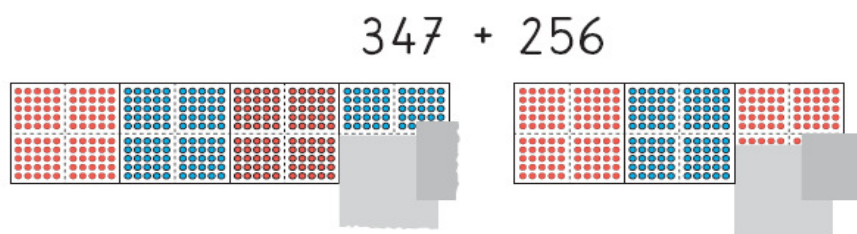


Abb. 9: Darstellung einer Plusaufgabe mit zwei Tausenderfeldern

Wenn Kinder diese Darstellungsform mit zwei Tausenderfeldern wählen, müssen sie die Hunderter, Zehner und Einer gedanklich zusammenfassen, was in den meisten Fällen nicht sonderlich

problematisch ist. Sollten einzelne Kinder damit Schwierigkeiten haben, rege ich an, zusätzliche Medien (Hunderterquadrate, Zehnerstreifen, Einerplättchen) heranzuziehen.

Kinder, die sehr rasch zu Lösungen kommen, ersuche ich zu überlegen, ob es „noch andere Möglichkeiten gibt, diese Aufgabe zu rechnen“. So haben meine Schülerinnen und Schüler alle nachfolgend beschriebenen Strategien selbständig entwickelt und konnten sie in ihren Worten nachvollziehbar beschreiben.

Nun werden die verschiedenen Strategien geordnet und benannt. „Die Benennung der Strategien hat den Vorteil, dass sie **bewusster** genutzt und zum Gegenstand der Diskussion gemacht werden können (Wittmann, 1994, Hervorhebung im Original).

- **Stellenwert extra**

Diese Strategie ist äußerst wichtig, da das schriftliche Additionsverfahren darauf zurückgeführt wird.

Beispiel: 
$$\begin{array}{r} \underline{347 + 256} = 500 + 90 + 13 = \underline{603} \\ 300 + 200 \\ 40 + 50 \\ 7 + 6 \end{array}$$

- **Schrittweise**

Beispiel: 
$$\begin{array}{r} \underline{347 + 256} = 597 + 6 = \underline{603} \\ 547 + 50 + 6 \end{array}$$

- **Vereinfachen**

Diese Strategie beruht auf dem Gesetz von der Konstanz der Summe und kann mehrfach hintereinander angewendet werden.

Beispiel: 
$$\begin{array}{r} \underline{347 + 256} = \underline{603} \\ \underline{350 + 253} \\ 400 + 203 \end{array}$$

- **Hilfsaufgabe**

Diese Strategie ähnelt dem Vereinfachen. Unter dem Strich wird kein Rechenweg, sondern eine Hilfsaufgabe notiert, die leichter zu rechnen ist und zur Lösung führt.

*Beispiel:* 
$$\begin{array}{r} \underline{347 + 256 = 603} \\ 350 + 256 = 606 \end{array}$$

Nach einigen weiteren Beispielen besprechen wir Vor- und Nachteile der verschiedenen Strategien. Dabei wird einerseits klar, dass es so etwas wie „Lieblingsstrategien“ geben kann, aber auch, dass nicht für jede Aufgabe jede Strategie gleich günstig anzuwenden ist. Solche „Strategiekonferenzen“, in denen Rechenwege, Gedankengänge, etc. beschrieben, verglichen und bewertet werden, sind auf jeden Fall sehr lehrreich und nehmen in meinem Unterricht mittlerweile einen großen Stellenwert ein.

### **3.2.2 Strategien beim halbschriftlichen Subtrahieren**

Beim halbschriftlichen Subtrahieren werden im Prinzip dieselben Strategien angewandt (Stellenwerte extra, Schrittweise, Vereinfachen, Hilfsaufgabe und neu: das Ergänzen!). Die Kinder suchen wieder, mit oder ohne Hilfe von Material ihre eigenen Wege.

Ich möchte nachfolgend nur auf zwei Strategien näher eingehen:

- **Stellenwerte extra**

*Beispiel:* 
$$\begin{array}{r} \underline{265 - 127 = 100 + 40 - 2 = 138} \\ 200 - 100 \\ 60 - 20 \\ 5 - 7 \end{array}$$

Auffällig bei dieser Methode ist, dass hier anscheinend bereits mit negativen Zahlen gerechnet werden muss (5 – 7). Ich stand dieser Strategie selbst eher skeptisch gegenüber. Christoph, einer meiner



Drittklässler, entwickelte diese Strategie aber für sich selbst mit der Erklärung, man müsse eben noch 2 abziehen. Dies notierte er folgendermaßen:

$200 - 100 = 100$
$60 - 20 = 40$
$5 - 7 = 2 - \dots\dots\dots 100 + 40 - 2 = 138$

(Das Minus nach der 2 sollte ihn erinnern, dass 2 noch weggerechnet werden muss, da ja erst 5 weggerechnet werden konnte.)

Ihm gefiel diese Strategie so gut, dass er sie für sich überwiegend anwendete.

- **Ergänzen**

Diese Strategie kommt beim Subtrahieren neu hinzu und deutet die Minusrechnung als Ergänzungsaufgabe, was nicht allen Kindern so ohne weiteres klar ist. Die Darstellung am Tausenderfeld (127 wird von vorne transparent abgedeckt und 265 hinten deckend abgedeckt) macht den Zusammenhang von  $265 - 127$  und  $127 + x = 265$  doch nachvollziehbar. Die Erkenntnis, dass Subtrahieren und Ergänzen eng miteinander zusammenhängen, ist vor allem beim Sachrechnen enorm wichtig. Darüber hinaus lassen sich viele Subtraktionen, deren Minuend und Subtrahend nahe beieinander liegen, auf diese Art sehr einfach und erfolgreich lösen.

*Beispiel:* 
$$\begin{array}{r} \underline{265 - 127} = 3 + 135 = \underline{138} \\ 130 \\ 265 \end{array}$$

### 3.2.3 Üben der halbschriftlichen Addition und Subtraktion

Im Kontext des aktiv-entdeckenden Lernens nimmt das Üben einen etwas anderen Stellenwert ein als im traditionellen Rechenunterricht. Üben wird hier noch deutlicher als ein integraler Bestandteil des Lernprozesses

gesehen, wobei eine scharfe Trennung nach Einführung, Übung und Anwendung nicht vorgenommen werden kann.

In der Literatur begegnen wir drei Arten von mathematisch strukturierten Übungen:

- **Problemorientierte Übung:** Die Beziehung der Aufgaben untereinander ergibt sich aus einer übergeordneten Fragestellung/einer Problemstellung.
- **Operativ strukturierte Übung:** Die Beziehung der Aufgaben untereinander ergibt sich aus der systematischen Variation der Aufgaben und der Zahlen in den Aufgaben; die Ergebnisse stehen in einem gesetzmäßigen Zusammenhang.
- **Sachstrukturierte Übung:** Die Beziehung der Aufgaben untereinander ergibt sich aus einem übergeordneten Sachzusammenhang. (Krauthausen/Scherer, 2001)

Beispiele hierfür können sein:

### Problemorientierte Übung

- Nachdem etwa die Aufgabe  $347 + 256 = 603$  nach verschiedenen Strategien berechnet wurde, könnte die Problemstellung lauten:  
„Finde weitere Aufgaben mit dem Ergebnis 603!“
- Lösen eines Rechendreiecks, in dem nur die äußeren Zahlen bekannt sind.

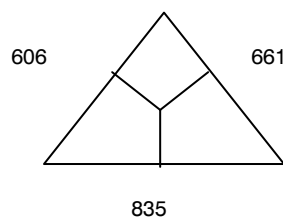


Abb. 10: „Problemorientiertes Rechendreieck“

### Operativ strukturierte Übungen

$201 + 500 = 701$	$201 + 500 = 701$	$500 - 201 = 299$	$1000 - 1 = 999$
$211 + 490 = 701$	$212 + 499 = 711$	$490 - 211 = 299$	$999 - 2 = 997$
$221 + 480 = 701$	$223 + 498 = 721$	$480 - 221 = 299$	$998 - 3 = 995$
$231 + 470 = 701$	$234 + 497 = 731$	$470 - 231 = 299$	$997 - 4 = 993$
.	.	.	.
.	.	.	.
$291 + 410 = 701$	$300 + 491 = 791$	$410 - 291 = 299$	$991 - 10 = 981$

Abb. 11: Schöne Päckchen nach Wittmann/Müller, 1994

Entscheidend bei der Arbeit mit solchen Päckchen ist nicht nur das Rechnen, sondern natürlich das Überlegen, Sprechen und Beschreiben des „Warum?“.

- „Umkehrzahlen“

Hier werden Differenzen zweier „Umkehrzahlen“ dreistelliger Zahlen gebildet.

Beispiel: 735 – 537, 941 – 149, 644 – 446

Wenn die Kinder die Struktur erfasst haben, können sie beginnen, weitere Beispiele zu suchen und die Ergebnisse halbschriftlich zu ermitteln. Beim Ordnen und Vorlesen der Ergebnisse fällt auf, dass sich bestimmte Ergebnisse immer wiederholen: 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891. Man wird bemerken, dass die Differenz von Hunderter- und Einerziffer ausschlaggebend ist. Die halbschriftliche Strategie „Stellenwerte extra“ belegt dies sehr anschaulich:

$$\underline{941 - 149} = \underline{800 - 8} = \underline{792}$$

$$900 - 100$$

$$40 - 40$$

$$1 - 9$$

An den Zwischenergebnissen (100 – 1, 200 – 2, ...) kann man auch sehr schön erkennen, dass die Ergebnisse Vielfache von 99 sind, was man den Zahlen so ohne weiteres nicht ansieht.

Die beiden Handbücher produktiver Rechenübungen von *Wittmann/Müller, 1994* sind eine wahre Fundgrube solcher Übungsformen.

### **Sachstrukturierte Übung**

- Viel Verkehr vor der Schule

An einer stark befahrenen Kreuzung im Schulbereich könnte eine Verkehrszählung durchgeführt werden, deren Ergebnisse in einer Tabelle zusammengefasst werden. In Gruppen kann nun vieles abgelesen, berechnet und entdeckt werden.

	PKW	LKW	Fahrräder
7 bis 8 Uhr	120	17	27
8 bis 9 Uhr	36	8	5
9 bis 10 Uhr	17	12	7
...			

Sachstrukturierte Übungen bereichern durch das Gespräch bzw. die Diskussion darüber (auch im Sinne eines fachübergreifenden Unterrichts) das sachkundliche Wissen der Kinder. Dabei wird auch der Entstehung der bereits erwähnten „Parallelwelt“ entgegen gearbeitet.

### 3.3 Zusammenfassende Überlegungen

Abschließend möchte ich einige Punkte, die mir im Umgang mit dem halbschriftlichen Addieren und Subtrahieren nach dem Prinzip des aktiv-entdeckenden Lernens äußerst wichtig erscheinen, noch einmal deutlich herausstreichen.

- Die Kinder können und sollen selbst aktiv – entdeckend Strategien entwickeln und Lösungswege suchen. Keinesfalls sollten Rechenvorschriften frühzeitig erlassen werden, da dies nur die Aktivität und Kreativität der Kinder hemmt.
- In diesem Zusammenhang daher aber unabdingbar notwendig sind Besprechungen, so genannte Strategiekonferenzen, in denen die entwickelten Lösungswege vorgestellt, diskutiert, verglichen und besprochen werden. Fehlentwicklungen sollen von den Kindern selbst eingesehen werden, sie sollten nicht durch Vorschriften davon abgebracht werden.
- Einsicht darf nicht etwas sein, was den „guten“ Schülerinnen und Schülern vorbehalten ist. Gerade Kinder, die zusätzliche Hilfestellungen benötigen, um Strategien für sich selbst zu entwickeln, benötigen die Einsicht in das, was sie tun.
- Reines „Kopfrechnen“, also das Rechnen ohne Aufschreiben von Zwischenergebnissen, ist gerade im Tausenderraum (aber auch

bereits im Zahlenraum 100) nicht vorrangig anzustreben. Das Notieren von Zwischenergebnissen darf daher keinesfalls ausschließlich für die „schwächeren Kinder“ sein. Es hilft ja nicht nur, das Arbeitsgedächtnis zu entlasten, sondern ist darüber hinaus eine Grundlage für das wichtige „Nachbesprechen“ der Lösungswege in den Strategiekonferenzen.

#### **4 Der Umgang mit dem Fehler**

Gerade in der Mathematik – wo scheinbar alles klar geregelt ist – tut man sich häufig im Umgang mit dem Fehler sehr schwer. Die Auffassung, Fehler seien etwas Bedrohliches und daher etwas tunlichst zu Verhinderndes, ist weit verbreitet. Gerade deswegen wird ja heute noch oft der Weg der kleinen und kleinsten Schritte gegangen und ein scheinbar sicherer Weg vorgegeben. Doch Fehler sind normal (*vgl. Spiegel/Selter, 2003*). Für die Schule sollte gelten, was auch für den Alltag gilt. Wir können nicht lernen, wenn wir keine Fehler machen dürfen. Wenn Kinder das Gehen oder Sprechen oder Radfahren lernen, werden diese komplexen Fähigkeiten auch nicht in Einzelkomponenten zerlegt, die nacheinander gelernt werden. Es erwartet aber auch niemand, dass keine Missgeschicke passieren und gleich alle Feinheiten beherrscht werden.

Dies muss meiner Meinung nach zu einem deutlichen Umdenken in unserer Fehlerkultur führen. Das ständige Markieren jedes noch so kleinen Fehlers mit Rotstift, das Zählen der Fehler (und nicht der bereits gelungenen Aufgaben), das Hervorheben des Mangelhaften muss die Entdeckungs- und Forschungsfreude der Kinder zum Erlöschen bringen. Vor allem aber sollten wir Lehrenden sehr vorsichtig sein mit Kommentaren, die wir unter Kinderarbeiten setzen. Denn Aussagen wie: „Du musst noch mehr üben!“, wobei das Kind doch die ganze Woche mit der Mutter auf die Klassenarbeit hingepaukt hat, können Kinder an ihren Aufgaben völlig verzweifeln lassen. Und Verzweiflung und Mutlosigkeit sind die schlechtesten Lehrer.

Wobei man nicht vergessen darf, dass oft einiges von dem, was in den Augen der Lehrerinnen und Lehrer fehlerhaft erscheint, so falsch gar nicht ist. Denn aus der Sicht desjenigen, der ihn begangen hat, war der Fehler häufig sinnvoll. In den seltensten Fällen haben sich Kinder bei ihren Arbeiten wirklich nichts gedacht. So ist es eher unser Fehler, wenn wir dies nicht erkennen.

Gerade aktiv-entdeckender Unterricht fordert einen anderen Umgang mit Fehlerhaftem. Wir müssen uns bemühen, Kinder nicht vorschnell zu korrigieren, da sich dies störend auf das Denken, Überlegen und Entdecken auswirkt. Und es macht gar nichts, wenn ein Fehler im Rechenheft einmal unverbessert stehen bleibt. Fehlerhafte Lösungen prägen sich nicht unauslöschlich ins Gehirn ein, sonst müssten sich sämtliche richtige Musterlösungen ebenfalls längst dort eingebrannt haben.

Wenn aber Kinder erfahren, dass ihr Denken und Überlegen ernst genommen wird, dass sie – manchmal mit, manchmal ohne Hilfe etwas herausfinden können, dann führt das zu einem entspannten Verhältnis zu ihren eigenen Fehlern, aber auch zum Gegenstand Mathematik an sich und zum Lernen ganz allgemein.

## **5 Schlussbemerkungen**

Im Rahmen dieser Arbeit konnte ich nur einen winzigen Teil der Jahresarbeit auf der 3. Schulstufe nach dem aktiv-entdeckenden Prinzip beleuchten.

Resümierend kann ich feststellen, dass die Kinder sicherlich zumindest genauso gut rechnen gelernt, manche Inhalte sogar besser verstanden und verinnerlicht haben, jedenfalls aber mit viel mehr Freude und Engagement bei der Sache gewesen sind. Mathematikstunden bekamen immer mehr den Status einer Forscher- bzw. Entdeckerstunde. Und da Kinder dieser Altersstufe nun einmal gerne forschen und auf Entdeckungsreise gehen, waren sie auch entsprechend beliebt.

Dies soll auch eine kleine Episode verdeutlichen, die ich in diesem Schuljahr erlebt habe.

Ich verwendete ein Mathematikbuch, in dem häufig am Beginn von Aufgabenserien eine Musterlösung mit der Formulierung „Denke so!“ vorangestellt wurde. Meine Kinder, insbesondere eine Schülerin, störte das offensichtlich so sehr, dass sie sich eines Tages beschwerte: „Wieso dürfen uns die (gemeint waren die Schulbuchautorinnen) vorschreiben, wie wir denken sollen?“ Die Kinder beschlossen, an eine der Verfasserinnen des Mathematikbuches einen Brief zu schreiben und sie zu ersuchen, in Zukunft den Kindern ihre Denkweisen nicht mehr vorzuschreiben. Sie bekamen von der Schulbuchautorin per E-mail auch Antwort, worauf die Kinder irrsinnig stolz waren.

Was ich mit meiner Arbeit nicht bezwecken wollte, ist die Verkündung einer „Heilslehre“ zur Vorbeugung oder Verhinderung jeglicher Probleme im Mathematikunterricht. Dies wäre unseriös, nicht im Sinne der Lehrkräfte und schon gar nicht im Sinne der Kinder.

Sehr wohl meine ich aber, dass es sich auf alle Fälle lohnt, den Unterricht im Sinne der modernen fachdidaktischen Erkenntnisse zu optimieren. Diese Erkenntnisse auch an möglichst viele Lehrerinnen und Lehrern weiterzutransportieren, müsste ein Schwerpunkt von Fortbildungsveranstaltungen in naher Zukunft sein, wozu ich gerne meinen Beitrag leisten würde.

## Literaturverzeichnis

Gaidoschik, M.: *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern*. Wien: öbv&hpt 2002

Gaidoschik, M.: Rechenstörungen: Die „didaktogene Komponente“. Kritische Thesen zur „herkömmlichen Unterrichtspraxis“ in drei Kernbereichen der Grundschulmathematik. In: Lenart, F./ Holzer, N./ Schaupp, H. (Hg.): *Rechenschwäche – Rechenstörung - Dyskalkulie: Erkennung, Prävention, Förderung*. Graz: Leykam 2003

Krauthausen, G.: Entwicklung arithmetischer Fertigkeiten und Strategien – Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen. In: Fritz, A./Ricken, G./Schmidt, S. (Hg.): *Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*. Weinheim, Basel, Berlin: Beltz 2003

Krauthausen, G.: *Lernen – Lehren – Lehren lernen*. Leipzig – Stuttgart – Düsseldorf: Klett 1998

Krauthausen, G./Scherer, P.: *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg – Berlin: Spektrum 2001

Kühnel, J.: *Neubau des Rechenunterrichts*. Leipzig, Berlin: Klinkhardt 1916

Radatz, H./Schipper, W.: *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel 1983

Schmassmann, M: Lernförderung und zeitgemäße Mathematikdidaktik – Aktiv-entdeckendes Lernen bei mathematischen Lernschwierigkeiten. In: Lenart, F./ Holzer, N./ Schaupp, H. (Hg.): *Rechenschwäche – Rechenstörung - Dyskalkulie: Erkennung, Prävention, Förderung*. Graz: Leykam 2003

Spiegel, H./Selter, Ch.: *Kinder & Mathematik: Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze – Velber: Kallmeyer 2003

Spitzer, M.: *Lernen. Gehirnforschung und die Schule des Lebens*. Heidelberg - Berlin: Spektrum 2002

Wittmann, E. Ch.: Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: Wittmann, E. Ch./Müller, G.N.: *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1*. Stuttgart – Düsseldorf – Berlin – Leipzig: Klett 1994

Wittmann, E. Ch./Müller, G. N.: *Handbuch produktiver Rechenübungen, 2 Bände*. Stuttgart – Düsseldorf – Berlin – Leipzig: Klett 1994



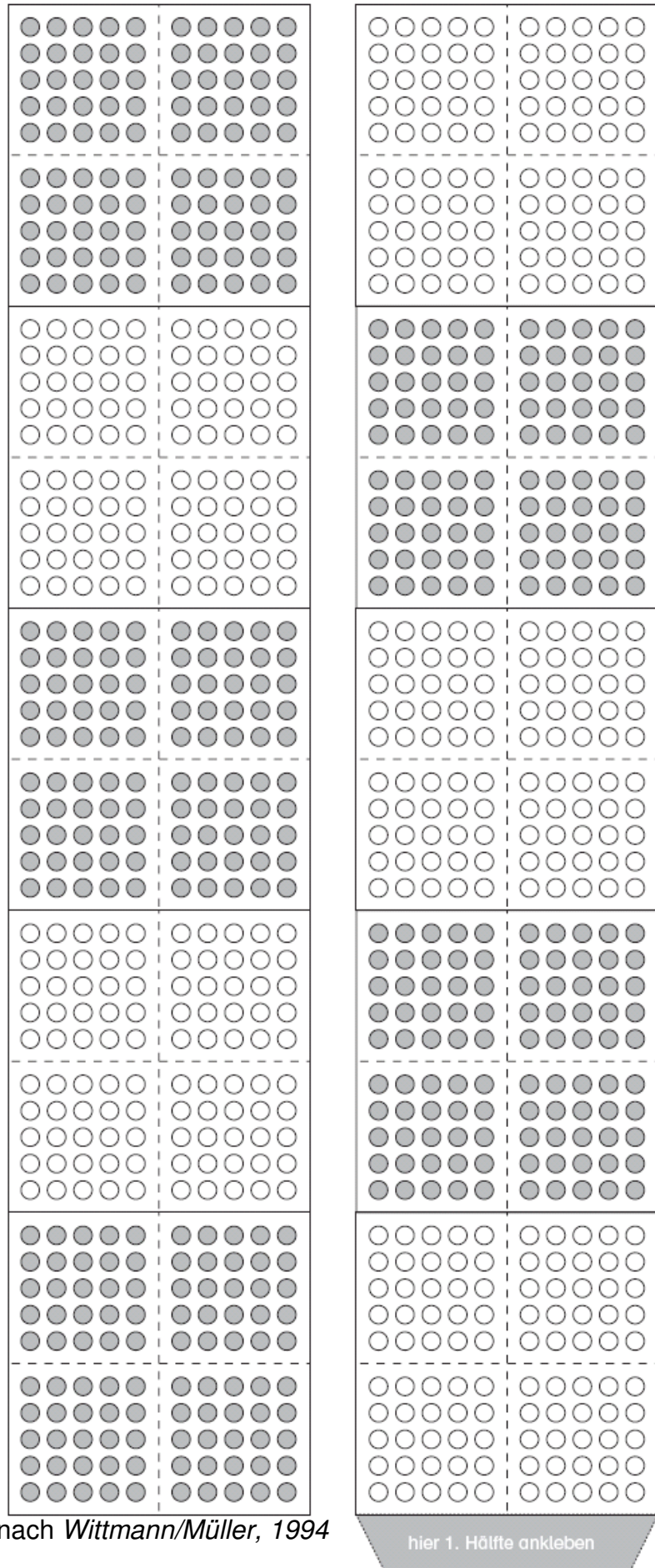
## **Quellenverzeichnis der Abbildungen**

Abb. 3: Steiner, G. F. u.a.: *Rechenigel, Band 3, Mathematik für die 3. Schulstufe, Erarbeitungsteil*. Wien: Reniets, 2003, Seite 20

Abb. 4: Ebenda, Seite 21

Abb. 9: Ebenda, Seite 50

# Anhang



Tausenderfeld nach *Wittmann/Müller, 1994*

hier 1. Hälfte ankleben

