2007

Aktiv-entdeckender Mathematikunterricht und produktive Übungsformate

Erarbeiten und produktives Üben der schriftlichen Rechenverfahren in einer Mehrstufenklasse (3. und 4. Schulstufe)

Akademielehrgang LernberaterIn Mathematik
Themensteller: Mag. Michael Gaidoschik

Doris PEDRAZZA
Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Unterrichtssituation

1.1 Meine derzeitige Unterrichtssituation

Ich unterrichte in einer zweiklassigen Kleinschule in Schwarzenbach/Pielach im Bezirk St. Pölten – Land. Einige Jahre wurde unsere Schule sogar einklassig geführt. Heuer gibt es zwei Klassen, weil wir drei Kinder mit sonderpädagogischen Förderbedarf an der Schule haben. Insgesamt besuchen 23 Schüler unsere Schule.

Heuer unterrichte ich insgesamt 13 Schüler der 3. und 4. Schulstufe. 4 Kinder sind in der 3. Schulstufe und 8 Kinder in der 4. Schulstufe. Zwei Kinder der 4. Schulstufe haben sonderpädagogischen Förderbedarf. Ein Schüler wird nach dem Lehrplan der ASO unterrichtet und ein Mädchen hat den Schwerstbehindertenlehrplan. Die beiden Kinder mit SPF werden wöchentlich mit 10 Stunden von einer Sonderpädagogin betreut, die restliche Zeit werden die Kinder von mir allein betreut. Der Bub mit ASO –Lehrplan kann allerdings dem MA – Unterricht nach VS – Lehrplan folgen und ich habe heuer erreicht, dass der ASO –Lehrplan in Mathematik aufgehoben wird.

In den Mathematikstunden unterrichte ich ein Kind mehr. In der 2. Schulstufe in unserer Schule gibt es nämlich ein in Mathematik sehr begabtes Mädchen. Sie ist ein Kind, das vom Mehrstufenunterricht sehr profitierte. Allein durch das Hören des Stoffes der zweiten Stufe eignete sie sich in der ersten Schulstufe den gesamten Mathematikunterrichtsstoff der zweiten Stufe an. Als sie dann im Herbst in die zweite Stufe kam langweilte sie sich nur und die Lehrerin differenzierte im Unterricht mit Zusatzangeboten für Lisa. Doch bald hatte sie sämtliche Lernspiele durch und war offensichtlich wieder unterfordert. Deshalb beschlossen wir, dass sie in Mathematik in meine Klasse kommt und mit dem Stoff der dritten Klasse mitmacht. Seither übertrifft sie meine 4 Drittklässer auch ständig mit ihren Leistungen! Für mich ist es eine wertvolle Erfahrung, ein so begabtes Kind in Mathematik unterrichten zu dürfen. Sie ist mit so großer Freude und Begeisterung dabei, dass dies meinen Unterricht sehr bereichert. Zu der dritten Klasse gibt es noch zu erwähnen, dass von den 4 Kindern zwei sehr lernschwach sind, so dass dies einer weiteren Differenzierung bedarf.

Ich unterrichte nun schon das 5. Jahr in einer Mehrstufenklasse – derartige Bedingungen durch die nötige Differenzierung innerhalb einer Lerngruppe hatte ich allerdings noch nie zuvor.

Die 3 Schüler der vierten Klasse (ein Mädchen und zwei Buben) würde ich als begabte Mathematiker bezeichnen. Sie haben Freude am Forschen und Entdecken und versuchen selbst Lösungen herbeizuführen. Sie knobeln gerne an schwierigeren Aufgaben und freuen sich, diese präsentieren zu dürfen. Die anderen zwei Mädchen und einen Buben würde ich als durchschnittlich begabt bezeichnen. Mit Knobelaufgaben oder offenen Aufgabenstellungen bereite ich diesen Kindern keine sehr große Freude. Ein selbständiges Entdecken eines Lösungsweges scheitert meist an Geduld und Ausdauer. Ein Schüler der 4. Schulstufe kam erst im Herbst 2006 in meine Klasse. Durch die Trennung der Eltern kam es zu einem Wohnortwechsel und damit verbundenen Schulwechsel. Er ist ein rechenschwaches Kind. Die dritte Schulstufe hat er wegen Mathematik wiederholt. Für ihn war der Schulwechsel eine besondere Herausforderung. Er war schließlich 4 Jahre lang in einer einstufig geführten Klasse und war es daher gewohnt ständig dies zu tun, was die Lehrerin gerade vormachte oder die Mitschüler auch gerade machten. Offenen Unterricht war er überhaupt nicht gewohnt. In unserer Schule sind die Schüler von der ersten Schulstufe daran gewöhnt, selbständig zu arbeiten, zumindest dann, wenn sich die Lehrperson mit der anderen Schulstufe befasst. Wir haben an unserer Schule ein sehr großes Angebot an Lernspielen. Für die Kinder ist es selbstverständlich, dass sie, wenn sie eine Arbeit fertig gestellt haben, sich selbst um sinnvolle Beschäftigung kümmern. Sowohl meine Kollegin als auch ich sind sehr bemüht, den Unterricht häufig offen zu gestalten. Verständlicherweise war es für Dominik sehr schwer, wenn ich im Mathematikunterricht von ihm verlangte, einen eigenständigen Lösungsweg zu finden. Dies war auch nie möglich! Seine Leistungen in Mathematik waren das ganze Jahr über schlechter als die von Max (das ist der Schüler mit ASO - Lehrplan).

1.2 Aktiv-entdeckender Unterricht - ein gewagtes Vorhaben

Im Sommer 2006 beschloss ich, den Mathematikunterricht im Schuljahr 2006/07 aktiv–entdeckender zu gestalten, ohne Schulbücher. Die bereits bestellten Schulbücher verstaute ich im Kasten. Unterricht in einer Mehrstufenklasse bedeutet allerdings, dass die Unterrichtseinheit (50 Minuten) auf zwei Schulstufen aufgeteilt werden muss. Der Lehrer hat für eine Klasse „Zeit“ (= Erarbeitungszeit) und die andere Klasse hat Übungs- oder Festigungsphase (= Stillbeschäftigung, diese ist nötig, damit die andere Schulstufe nicht gestört wird). Bald holte ich die weggeräumten Schulbücher wieder aus dem Kasten, um Übungsbeispiele parat zu haben und um nicht nur zu kopieren! Neue Themen erarbeitete ich stets ohne Buch, für Übungsbeispiele verwendete ich dann doch die Rechenbücher. So fand mein Unterricht dann heuer doch auf relativ gewohnte Weise statt. Ich bemühte mich, hin und wieder produktives Übungsmaterial bereitzustellen oder offene Aufgaben im Mathematikunterricht einzubauen. Meine Schüler mussten sich an derartige Aufgabenstellungen auch erst gewöhnen, offene Aufgaben erweckten bei den Schülern nicht das Interesse, das ich mir eigentlich erwartet oder erhofft hatte. Für sie waren derartige Aufgabenstellungen natürlich ungewohnt. Mein Ziel, das ich mir gesetzt hatte, einen aktiv-entdeckenden Unterricht zu gestalten, war wohl etwas zu hoch gesteckt und wäre in einer einklassig geführten Klasse vielleicht leichter umsetzbar gewesen. Dennoch war es für die Kinder sicher ein abwechslungsreicherer Mathematikunterricht als früher und für mich eine wertvolle Erfahrung.

Ausblick auf die folgenden Kapitel:

In den folgenden Kapiteln werde ich versuchen zu erörtern, was man unter aktiv-entdeckendem Unterricht und produktiven Übungen versteht. Weiters werde ich auf mögliche Erarbeitungsformen der schriftlichen Rechenverfahren eingehen und Übungsanregungen zur Vertiefung des Verständnisses dieser anführen. Einige dieser Anregungen habe ich in meiner Klasse selbst ausprobiert und werde versuchen, diese zu dokumentieren. In meiner Arbeit findet sich nur ein Auszug aus vielen weiteren Angeboten, die man in der hinten angeführten Literaturliste findet.

2 Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens

2.1 Grundpositionen des Lehrens und Lernens

E.Ch. Wittmann unterscheidet, in einem Aufsatz im Anhang zum Handbuch produktiver Rechenübungen (Band 1), zwei verschiedene Positionen (vgl. Wittmann):

2.1.1 Die passivistische Position

Sie gründet sich auf die Philosophie des Empirismus und die Psychologie des Behaviorismus (Assoziationspsychologie). Sie besagt, dass die Entstehung von Wissen durch die Wirkung äußerer Ursachen geschieht (=natürliche und soziale Umwelt = z.B. Lehrer). Die von außen kommenden Sinneseindrücke prägen sich durch Wiederholung ein. Der Lernende setzt seine Sinne ein und braucht nur nachzuahmen, was ihm vorgemacht wird, bleibt dabei aber passiv. Er wird sozusagen mit Wissen „beladen".

2.1.2 Die aktivistische Position

Sie gründet auf der Philosophie von Kant und Leibniz und der Kognitionspsychologie, im Besonderen der genetischen Psychologie von J. Piaget.

Diese Position begründet die Entstehung von Wissen im Lernenden als dessen aktive Konstruktion, also als Ergebnis einer Wechselwirkung von „innen" und „außen". In dieser Sichtweise muss sich der Lernende seinen Wissenszuwachs aktiv erarbeiten. Wissen soll ihm also nicht beigebracht werden, sondern der Schüler soll es sich „erwerben". Damit verändern sich auch die Aufgaben des Lehrers. Er bietet den Stoff nicht dar, sondern versucht die Fähigkeiten des Schülers zu entwickeln. Seine Aufgaben sind nicht Rezeptivität und Leitung sondern Organisation und Aktivität.

2.2 Zwei kontroverse Lehr-/Lernkonzeptionen

Die passivistische und die aktivistische Positionen ziehen zwei kontroverse Lehr-/Lernkonzeptionen nach sich: Lernen und Üben nach dem Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte und das Lernen und Üben nach dem Prinzip des aktiv-entdeckenden Lernens.

2.2.1 Lernen und Üben nach dem Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte

Der Lernstoff wird in „Lernatome“ zerlegt, die voneinander isoliert durchgenommen werden. Die zu erlernenden Wissenselemente und Fertigkeiten werden zunächst an Musteraufgaben erläutert und schließlich werden durch eine Vielzahl von Klein- und Kleinstaufgaben „Musterlösungen“ eingeübt. Die Aufgaben sind beziehungslos aufgereiht und die Kontrolle kommt von außen, also vom Lehrer. Solch ein Unterricht zielt ab auf die Vermittlung normierter Kenntnisse und Fertigkeiten und deren konforme Anwendung auf bestimmte Aufgabentypen.

Ich komme leider hier nicht darüber hinweg, an unsere in Österreich üblichen Schulbücher zu denken. Ein kleiner Exkurs:

Jedes Jahr wundere ich mich wieder über unsere Schulbücher. So zum Beispiel bei der Erarbeitung des Flächeninhaltes in unserem Schulbuch Matheblitz 4: Auf drei aufeinander folgenden Seiten werden die Maßeinheiten m^2, dm^2 und cm^2 eingeführt und jeweils mit der benachbarten Maßeinheit kurz in Beziehung gesetzt. Auf den folgenden Seiten wird das Berechnen des Flächeninhaltes erarbeitet und es folgen 2 Seiten mit Sachaufgaben, natürlich zum Flächeninhalt. Es folgen 11 Seiten mit Sachaufgaben zum Thema: Schlüsse, Kommaschreibweise, Sachverhalte aus Datenmaterial, aus Tabellen u.ä., bis schließlich die Maßeinheit mm^2 eingeführt wird und auf den folgenden zwei Seiten die „Maßbeziehungen: dm^2 - cm^2, cm^2-mm^2 erfasst werden sollen. Drei Seiten weiter kommen aber zur großen Überraschung die Brüche! Erst nach 9 Seiten „Erfassen von Bruchteilen“ dürfen sich die Schüler mit den großen Flächenmaßen beschäftigen! Der Lerninhalt wird in „Lernatome“ zerlegt und voneinander isoliert durchgenommen. (Sofern sich der Lehrer an die im Buch vorgegebene Reihenfolge hält – was meiner Meinung noch oft der Fall ist.)

Die Übungsaufgaben bei dieser Lernkonzeption stellen meist Serien gleichförmiger Aufgaben dar, die oft aus Motivationszwecken verbunden sind mit dem Ausmalen eines Bildes. Wittmann (1994) nennt solche Aufgabentypen „bunter Hund“ und „graue Päckchen“.

Gegen einen vereinzelten Einsatz solchen Materials ist wohl kaum etwas einzuwenden. Gegen einen ständigen Einsatz solcher Lern- und Übungspraxis nennt Wittmann (1994) allerdings eine Reihe von Gründen:

Es werden „Treibhauspflänzchen“, die in den Kindern nicht einwurzeln und in einer bestimmten Schulumgebung eine Zeitlang am Leben erhalten werden können. Denken und Rechnen werden entkoppelt (leichte Änderungen von Formulierungen und Schreibweisen können die Schüler völlig verwirren).

Der Schüler gewöhnt sich daran, die Verantwortung für das Lernen dem Lehrer zu überlassen und selbst passiv abzuwarten, bis ihm Rezepte und deren Anwendung erklärt werden. Die Kontrolle der Lösungen wird auf den Lehrer verlagert. Die Fähigkeit, Aufgaben selbst zu durchdenken und zu bewerten und so selbst Verantwortung für das Lernen zu übernehmen, wird nicht entwickelt.

Das monotone Üben stereotyper Aufgaben verführt zum kurzfristigen, oberflächlichen Anlernen von Mechanismen – ist also nicht auf Langzeiterfolg angelegt.

Derartige Aufgabenstellungen bieten keine Gelegenheit, an Problemsituationen probierend – entdeckend heranzugehen, also Gesetzmäßigkeiten, Beziehungen und Strukturen aufzuspüren. Das Fehlen dieser Fähigkeit beeinflusst stark die Fähigkeit zur Lösung von Sachaufgaben, bei denen gerade nicht vorgegeben ist, was man zu rechnen hat.

2.2.2 Lernen und Üben nach dem Prinzip des aktiv-entdeckenden Lernens

„Die einzelnen Lernabschnitte sind großzügiger bemessen und schaffen Sinnzusammenhänge, aus denen heraus sich für die Schüler vielfältige Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus ergeben“(Wittmann, 1994).

Die Schüler erarbeiten sich bestimmte Fertigkeiten, Wissenselemente und Lösungsstrategien selbst.

Wittmann nennt folgende Merkmale für produktives Üben und aktiv-entdeckendes Lernen:

1) Der Schüler wird veranlasst, eigene Denkleistungen zu erbringen, Hindernisse und Widerstände werden ihm nicht aus dem Weg geräumt, nur so lernt er, sie zu überwinden. An den unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus der Aufgabenstellung können sich lernschwache bis leistungsstarke beteiligen (=natürliche Differenzierung).
2) Bewusstheit und Verantwortung des Schülers für sein Lernen werden gefördert.
3) Die starke persönliche Beteiligung bei der Erarbeitung von Kenntnissen, Fertigkeiten und Denkstrategien führt zu viel besseren Langzeiterfolgen.
4) Lernen und Üben in Sinnzusammenhängen entspricht dem Wesen der Mathematik und ihren Anwendungen.

Folgende Einwände von Praktikern und Erwiderungen von Wittmann findet man in dessen Aufsatz im Anhang von Wittmann/Müller 1994:

- **„Aktiv-entdeckendes Lernen eignet sich nur für die guten Schüler, für lernschwache eignet sich ein langsames, kleinschrittiges Vorgehen mit gleichförmigen Übungen besser.“** Dieser elitären Interpretation muss man entgegnen, dass auch lernschwache Schüler ohne eigene Aktivität und ohne eigenes Zutun nicht effektiv lernen können.

- **„Viele Schüler zeigen eine Vorliebe für ‚graue Päckchen’ und ‚bunte Hunde’.“** Auch meiner Meinung nach ist es hier wichtig, einen gescheiten Mittelweg zu finden. Hin und wieder ein Arbeitblatt im Stil des „bunten Hundes“ wird sicher Schüler/innen, die gerne malen, gefallen – anderen hingegen wird es aber eher „lästig“ sein. Hier bedarf es meiner Meinung nach Gespür der Lehrperson, den Unterricht bzw. die Übungsphasen nicht zu einseitig zu gestalten.

- **„Aktiv-entdeckende Unterrichtsverfahren stoßen auf den Widerstand von Eltern und manchmal Kollegen.“** Dieser Einwand ist für mich persönlich nicht mehr sehr gerechtfertigt. Unser Lehrplan spricht von „Methodenfreiheit des Lehrers“. Entsprechende Elterninformation beim Elternabend ist sicherlich nützlich. Meiner Meinung nach sind die Eltern in den letzten Jahren aber immer "offener“ geworden für neue

Lehr- und Lernformen und sind eher dankbar dafür, dass ihren Kindern der Unterrichtsstoff nicht so „serviert" wird, wie einst ihnen selbst, sondern auf lebendigere Art und Weise.

- **„Aktiv-entdeckende Lehr- und Lernformen sind für den Lehrer anstrengender und aufwendiger."** Folgender Meinung Wittmann zu diesem Argument kann ich mich voll und ganz anschließen: Aktiv-entdeckender Unterricht versetzt den Lehrer in die Lage, sich zumindest teilweise vom direkten Eingriff in den Unterricht zurückzuziehen, um sich mehr auf eine Lenkung des Lernens zu verlegen. Hier kann sich der Lehrer auf zwei wichtige Grundpfeiler des Lernens stützen. Auf die Selbstorganisationskräfte der Schüler und ihre Fähigkeit, sich gegenseitig zu helfen. Der Lehrer gibt also lediglich „Hilfe zur Selbsthilfe" (vgl. Wittmann, 1994).

Diese beiden Grundpfeiler würde ich übrigens auch bezeichnen als typische Merkmale des Unterricht in der Mehrstufenklasse: Die Schüler sind gewohnt sich selbst zu organisieren – z. B. sich selbst eine Beschäftigung zu organisieren, wenn sie mit einer Arbeit fertig sind und der Lehrer aber noch mit der anderen Schulstufe beschäftigt ist. Ebenso ist es in der Mehrstufenklasse selbstverständlich, sich gegenseitig zu helfen – der Ältere hilft dem Jüngeren und festigt dadurch sein Wissen, in dem er es dem Jüngeren weitergibt.

Das Erlernen dieser aktiv-entdeckenden Unterrichtsmethode bedarf sicherlich ein hohes Maß an Energie und Zeitinvestition seitens der Lehrperson. Ist diese Investition allerdings geschafft, belastet diese Methode den Lehrer weniger als die reglementierende, kleinschrittige Methode. Erwähnenswert ist noch, dass es sicher keinen Sinn hat Lehrer/innen zu dieser Methode zu überreden- sie hätte dann ohnehin keinen Erfolg.

2.3 Produktive Übungsformate

2.3.1 Was macht ein Übungsbeispiel produktiv?

Günther Krauthausen und Petra Scherer meinen, dass das Üben oder Festigen eines Lerninhaltes einer modernen Mathematikdidaktik nur dann Rechnung trägt, wenn folgende Aspekte verfolgt werden:

- Neue Erkenntnisse werden mit bereits früher erworbenen Wissen verknüpft

- Das Wissen kann auch auf andere mathematische Inhalte und im Alltagswissen angewendet werden
- Mathematische Kompetenzen werden gefestigt
- Durch die Aufgabenstellungen kommt es zu Entdeckungen von Eigenschaften und Strukturen
- Automatisation von Rechenverfahren

„Das Aufgabenangebot ist vielfältig, manchmal aber auch fragwürdig wenn sich hinter angeblich „produktiven Übungsformen“ nur wenig ertragreiche Übungen mit motivationalen Verpackungen verbergen“ (Krauthausen/ Scherer, 2006).

Als sinnvolle Angebote bezeichnen Krauthausen und Scherer (2006) folgende Aufgabenformate:

- **Produktive Übungsformen**
- **Substantielle Aufgabenformate**
- **Problemorientierte Aufgabenstellungen**
- **Offene Aufgabenstellungen**

Gemeinsam ist diesen Übungsformaten, dass im Prozess des Übens neue Aspekte entdeckt werden und Bekanntes vernetzt werden kann. Sie weisen ein gewisses Maß an Komplexität und Offenheit auf, dadurch werden den Schülern unterschiedliche Zugänge und Entdeckungen ermöglicht.

Produktive Übungsformen regen zur Herstellung von „Produkten“ (Tabellen, Figuren, Feldern,…) an.

Petra Scherer beschreibt folgende Übungsformate (vgl. Scherer 2006):

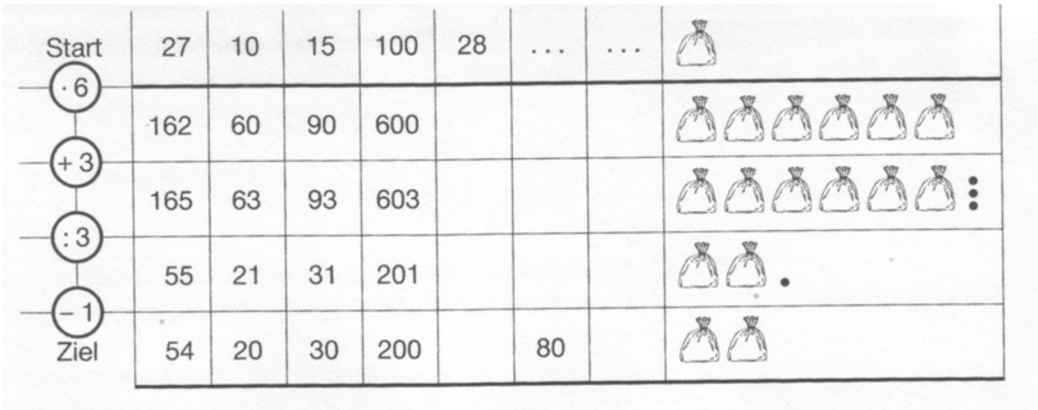
- Operativ strukturierte Übungen
- Problemstrukturierte Übungen
- Sachstrukturierte Übungen
- Offene Aufgaben

2.3.2 Operativ strukturierte Übungen:

Diese Übungen bestehen aus Serien, die systematisch variiert werden können. Die Ergebnisse stehen in einem gesetzmäßigen Zusammenhang. Um das bewegliche Denken der Kinder zu fördern, sollte das Ausnutzen von Strategien und Strukturen in operativen Übungen (z. B. operativen Päckchen) gefördert werden. Sie sollen das beziehungsreiche Lernen fördern.

Die Motivation der Schüler wird gefördert durch das Auftreten bestimmter Muster und gesetzmäßiger Phänomene. Durch diese der Übung innewohnende Struktur bietet sich den Schülern die Möglichkeit zur Selbstkontrolle.

Zum Beispiel Rechenketten



Start	27	10	15	100	28	...	...	
· 6	162	60	90	600				
+ 3	165	63	93	603				
: 3	55	21	31	201				
− 1 Ziel	54	20	30	200		80		

Abbildung 1: Rechenketten aus: Wittmann/Müller, 1994 (Seite 83)

Als Zielzahl erhält man das Doppelte der Startzahl!

Auch das ist eine operativ strukturierte Übung:

Abbildung 2: Operativ strukturiertes Übungsbeispiel aus: Heiner Müller, Rechenreihen mit Pfiff, 4. Schuljahr, Bergedorfer Kopiervorlagen

Die Ergebnisse sind ein (schönes) operatives Päckchen. Der Unterschied beträgt immer 31 – dies ermöglicht die Selbstkontrolle!

2.3.3 Problemstrukturierte Übungen:

Die zu lösenden Aufgaben sind in übergeordneten Fragestellungen eingebettet. Wichtig ist es hier sicherlich, dem Schüler Hilfen zu ermöglichen auf dem Weg zur Problemlösung. Denn, lernschwache Schüler verfügen über wenig Frustrationstoleranz und würden vorschnell resignieren.

Ein Beispiel für solch ein Aufgabenformat sind z. B. folgende Zahlenketten:

2 10 12 22 oder 8 4 12 16

(Die Summe zweier nebeneinander stehender Zahlen ergibt die 3. Zahl usw.)

Problemstellungen könnten folgendermaßen lauten:

- „Kannst du beide Startzahlen so wählen, dass du möglichst nahe an die Zielzahl 20 herankommst?“
- „Kannst du 20 genau erreichen?“

- „Finde weitere Möglichkeiten, 20 zu erreichen!“

2.3.4 Sachstrukturierte Übungen

Mehrere gleichartige Aufgaben ordnen sich in einen Sachzusammenhang ein. Die Ergebnisse und deren Diskussion sollen das sachkundliche Wissen bereichern. Es handelt sich hierbei also um ein anwendungsorientiertes Üben!

Vorteile des sachstrukturierten Übens:

- Die Sachsituation kann das Verstehen des Problems erleichtern
- Das Sachwissen wird vermehrt

Die Lebensbedeutsamkeit ist von zentraler Bedeutung, ganz besonders aber bei lernschwachen Schülern und Kindern mit sonderpädagogischen Förderbedarf.

Ein Beispiel dafür aus meiner Klasse ist die Münzzerlegung, die die Sonderpädagogin mit Andrea (das Kind mit Schwerstbehindertenlehrplan) legte:

Abbildung 3: Andrea legt Münzzerlegungen

Ein fächerübergreifendes Beispiel aus der 4. Schulstufe ist die Berechnung der Donaulänge in unserem Bundesland. Mit Hilfe eines Fadens wird der Donauverlauf auf einer Karte gelegt und anschließend mit Hilfe des Maßstabes berechnet:

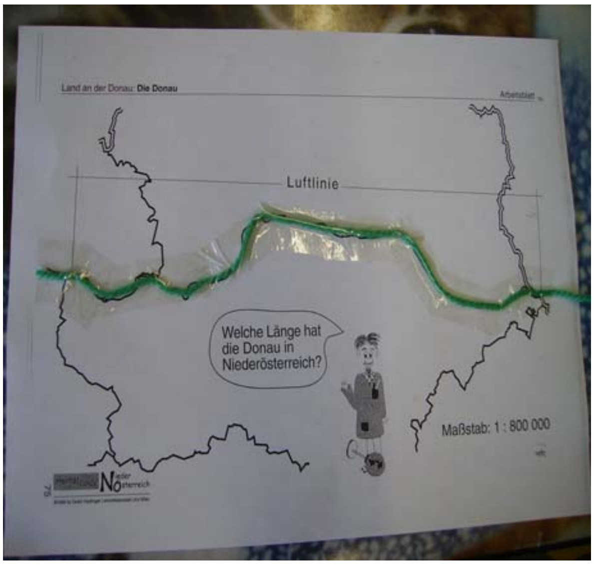


Abbildung 4: Berechnung der Donaulänge in NÖ

2.3.5 Offene Aufgaben:

Hier handelt es sich um eine natürliche Differenzierung, denn die Schüler wählen die Anzahl der Übungsaufgaben oder ihr Bearbeitungsniveau selbst. Sie können also ihren momentanen Leistungstand bezogen auf den Umfang und das Niveau der Übung selbst einbringen (z. B. durch die Wahl des Schwierigkeitsgrades oder durch die Wahl der Zahlenwerte). Dadurch können sie besser zeigen, was sie können!

So geht es beispielsweise auch um das Erfinden eigener Aufgaben: Z. B.:

- „Erfinde fünf Plusaufgaben. Das Ergebnis soll zwischen 100 und 110 liegen“ oder
- „Erfinde schriftliche Additionen, deren Ergebnis kleiner als 500 ist!

Je nachdem was geübt werden soll, werden bestimmte Rahmenbedingungen (Operationen, Zahlenräume, bestimmte Zahlen…) vorgegeben.

Offene Aufgaben fördern die Selbständigkeit und das Selbstvertrauen.

Anfangs – wenn eine solche Art des Übens den Kindern nicht vertraut ist – kann es durchaus zu einer gewissen Orientierungslosigkeit kommen.

Diese Erfahrung musste ich heuer auch machen:

Eines Tages forderte ich die Kinder auf, aus sechs gezogenen Ziffern möglichst viele dreistellige Zahlen zu bilden und mit diesen durch Zifferntausch möglichst viele Additionen und Subtraktionen zu bilden. Alle Drittklässler arbeiteten recht eifrig – doch meinen persönlichen Erwartungen entsprach die Haltung der Schüler trotzdem irgendwie nicht so richtig. Ich hatte mir wohl noch mehr Begeisterung erwartet! Als Lisa, das Kind aus der zweiten Schulstufe nächsten Tag zu mir in den Mathematikunterricht kam, schrieben die Schüler der 4. Klasse gerade an einer Mathematikschularbeit und die Schüler der Dritten an einer Rechenwiederholung (damit die 4. Klasse die nötige Ruhe für die Schularbeit hatte).

Ich stellte es Lisa frei, sich mit den oben beschriebenen offenen Aufgabenstellungen weiter zu beschäftigen oder auch das Arbeitsblatt (die Rechenwiederholung) auszufüllen. Zu meiner persönlichen „Enttäuschung“ entschied sie sich für das Arbeitsblatt und anschließend für ein Puzzle.

Auch sie befand sich wohl in einer solchen Orientierungslosigkeit – in der sie sich lieber für das bekannte, vertraute Aufgabenformat entschied.

Aber nicht nur für Lisa waren offene Aufgaben Neuland, natürlich mussten auch die anderen Drittklässler erst damit vertraut gemacht werden. Dies ist sicherlich kein Prozess von einigen Unterrichtseinheiten. Bei den Schülern der 4. Klasse konnte ich feststellen, dass solche Art von Aufgabenstellungen heuer für sie schon selbstverständlicher geworden sind als im Vorjahr. Trotzdem kann man sagen: „Manche Schüler freuen sich über offene Aufgabenstellungen, andere wieder überhaupt nicht.“

Die folgenden Abbildungen zeigen Ausschnitte aus Schülerheften. Die Schüler sollten sich halbschriftliche Multiplikationen ausdenken und rechnen. An den selbstgesetzten Zielen erkennt man gut die natürliche Differenzierung:

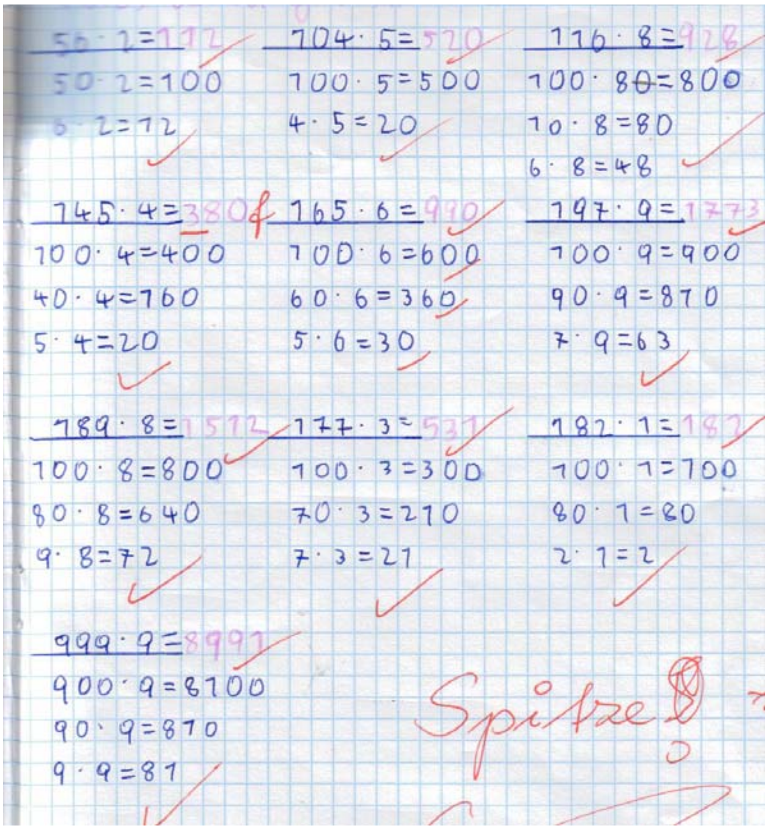


Abbildung 5: Selbstgewählte halbschriftliche Multiplikationen eines leistungsstarken Schülers (3. Schulstufe)

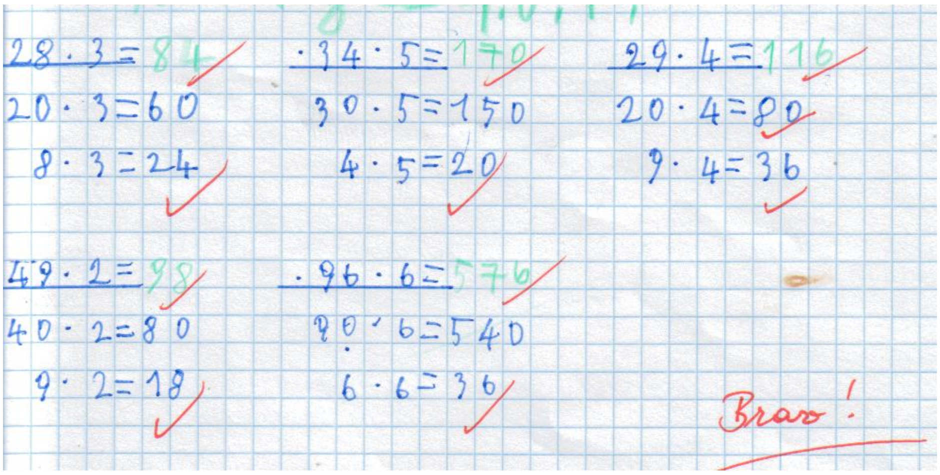


Abbildung 6: Selbstgewählte halbschriftliche Multiplikationen eines eher leistungsschwächeren Schülers (3. Schulstufe)

3 Schriftliche Rechenverfahren

3.1 Schriftliche Rechenverfahren pro und kontra

Es stellt sich die Frage, ob die Notwendigkeit des Erlernens der schriftlichen Rechenverfahren heute überhaupt noch besteht. Angesichts der leistungsstarken, preiswerten und fehlerfreien Taschenrechner könnte man doch leicht auf sie verzichten. Durch den Verzicht würde man Platz für andere Lerninhalte (Geometrie, Anwendungen…) oder für Unterrichtsprinzipien wie z.B. das ganzheitliche Lernen (oder ähnliches) erhalten.

Für die schriftlichen Rechenverfahren sprechen allerdings folgende Punkte:

- Man sollte nicht ganz abhängig vom Taschenrechner werden, sondern auch schriftlich rechnen können, da dies ein Gefühl eigener Kompetenz und Sicherheit gibt.
- Schriftliches Rechnen ist ein altes Kulturgut, das erste Einsichten in algorithmische Verfahren gibt. Sie sind ein wichtiger Beitrag zum Verständnis unseres Zahlensystems.
- Menschliche Irrtümer und Flüchtigkeitsfehler kommen beim Taschenrechner häufig vor.
- Die Kopfrechenleistungen rechenschwacher Kinder reichen oft nicht aus, Aufgaben mit größeren Zahlen halbschriftlich zu lösen.
- Auch über die schriftlichen Rechenverfahren lassen sich die oben genannten Unterrichtsprinzipien realisieren (vgl. Radatz u.a. 1999).

In deutschen Lehrplänen spielen die schriftlichen Rechenverfahren weit weniger Rolle als bei uns in Österreich. Dies fällt auch auf wenn man das deutsche Schulbuch „Das Zahlenbuch 3“ und „Das Zahlenbuch 4“ (Wittmann/Müller 2005) mit einem österreichischen Schulbuch der dritten oder vierten Stufe vergleicht.

Ich halte das sichere Beherrschen der vier schriftlichen Grundrechnungsarten für sehr wichtig. Auch wenn der Schüler in höheren Klassen oder als Erwachsener eines Tages sicher eher zum Taschenrechner als zu Papier und Bleistift greifen wird, sollte er die Fähigkeit besitzen, auch ohne Taschenrechner „rechnen“ zu können.

Bezogen auf die schriftliche Addition, Subtraktion und Multiplikation haben die meisten Erwachsenen diese Fähigkeit auch. Für die schriftliche Division trifft dies meiner Meinung nach bei vielen Erwachsenen allerdings nicht zu. Das doch komplexere Rechenverfahren lässt einen natürlich noch schneller zum Taschenrechner greifen als die anderen Rechenverfahren. Dadurch wird es vielleicht auch schneller „verlernt“ – andererseits war es in der Schulzeit vielleicht schon eine Plage, die später einfach „abgelegt“ wird.

Eine Plage stellt das schriftliche Dividieren in der Volksschulzeit für viele Schüler wirklich dar. Vor allem wenn in der 4. Schulstufe durch zweistellige Zahlen dividiert wird. Wir verlangen den Schülern hier eine schriftliche Rechenfertigkeit ab, die später sicher meist vom Taschenrechner bewältigt wird!

Ich trete nicht für einen Verzicht im Lehrplan auf die schriftliche Division ein. Eine Verlagerung der zweistelligen Division in die Mittelstufe würde uns in der Volksschule allerdings Platz schaffen für Unterrichtsinhalte, die meiner Meinung nach von großer Wichtigkeit wären, jedoch durch die Stofffülle häufig viel zu kurz kommen. Ich denke hier besonders an die Überschlagsrechnung und an mehr Zeit für ausführlicheres operatives Durcharbeiten von Lerninhalten.

3.2 Methodische Grundsätze für die schriftlichen Rechenverfahren

Zunächst einige wichtige methodische Grundsätze, die bei der Arbeit mit den schriftlichen Rechenverfahren zu beachten sind (vgl. Radatz u.a. 1999):

- Anknüpfen an Vorkenntnisse
- Einsicht in die Notwendigkeit des Verfahrens gewinnen
- Von passenden Sachsituationen ausgehen
- Handelndes Erarbeiten der Verfahren
- Frühzeitiges Berücksichtigen möglicher Schwierigkeiten
- Frühzeitig auf Schülerfehler achten
- Verfahren immer wieder erläutern oder ganz neu erarbeiten
- Zum Verfahren sprechen lassen
- Überschlagsrechnen nicht vernachlässigen

- Operative Übungen statt gleichartiger Drill
- Anwendungen über Sachaufgaben üben
- Problemhaltige Übungen und Aufgabenstellungen einsetzen

3.3 Die schriftliche Addition

3.3.1 Notwendige Vorkenntnisse:

Notwendige Vorkenntnisse sind auf jeden Fall das sichere Beherrschen des kleinen Einspluseins und ein fundiertes Verständnis des Bündelungsprinzips und der Stellenschreibweise größerer Zahlen.

3.3.2 Die Erarbeitung des Verfahrens:

Bei der Auswahl geeigneten Materials gibt es folgende Möglichkeiten:

- Erarbeitung mit Hilfe der Systemblöcke

Abbildung 7: Mein Förderkind arbeitet mit den Systemblöcken

- Erarbeitung mit Hilfe von Rechenplättchen in der Stellenwerttafel

  Hier bietet sich für den Lehrer die Möglichkeit, diese mit Hilfe des Overheadprojektors an die Wand zu projizieren und mit Plättchen die Handlung zu vollziehen. Für die Schüler kann man die Stellenwerttafel kopieren, eventuell auch laminieren – so kann man sie mit speziellen Stiften auch beschreiben und dies mit den hinten angebrachten Schwämmchen leicht wieder entfernen!

Ich bot den Schülern beide Materialien an. Zuerst die Systemblöcke und in weiterer Folge die Plättchen in der Stellenwerttabelle. Die Systemblöcke sind meiner Meinung nach anschaulicher und „begreifbarer" als die Plättchen in der Stellenwerttabelle. Da aber bekanntlich nicht jedes Anschauungsmaterial für jedes Kind gleich gut ist, halte ich ein vielfältiges Angebot für pädagogisch sinnvoll.

Weitere methodische Schritte :

- Erarbeitung ohne Material in der Stellenwerttafel:

H	Z	E
3	7	6
4_1	5	3
8	**2**	**9**

- Einführen verkürzter Schreib- und Sprechweisen
- Flexibilisierung des Verfahrens:

  Bei der schriftlichen Addition darf die Rechenrichtung geändert werden. Es muss nicht immer von unten nach oben gerechnet werden!

3.3.3 Schwierigkeiten und Schülerfehler:

Zwei Hauptschwierigkeitsmerkmale gibt es

- Fehler beim Übertrag

  Eine Hilfestellung könnte es sein, den Kindern den Übertrag anschreiben zu lassen. Bekanntlich haben aber nicht alle Schüler eine sorgfältige Heftführung und Handschrift, sodass dies manchmal zu mehr Verwirrung als Hilfe führt. Meine Schüler stellen den Übertrag mit den Fingern der nicht schreibenden Hand ein – bei der Addition geht dies noch recht gut!

- Fehler bei einer Null im Summanden

  Gezieltes Üben solcher Aufgaben hilft! Falls die Probleme trotzdem bestehen bleiben, wird eine Einzel- oder Kleingruppenförderung (Förderunterricht) sinnvoll sein, um die genaue Fehlerursache herausfinden zu können.

3.3.4 Übungsanregungen und Problemstellungen

- Die 1 000 erreichen oder eine andere vereinbarte Zahl:

  Z.B.:

	8	4	6
	□	□	□
1	0	0	0

- 6 Ziffern werden erwürfelt und sollen in das Leerschema so eingefügt werden, dass 1 000 möglichst nahe erreicht wird:

	□	□	□
	□	□	□
□	□	□	□

- Tintenklecksaufgaben:

3	✹	5
4	6	✹
✹	9	2

- Seltsame Aufgaben:
  Die Ziffernfolge führt zu interessanten Aufgaben, die zu tieferen Einsichten in die Gesetzmäßigkeiten und den Aufbau der Zahlenwelt führen:

  123456789
  098765432
  222222221

- Zahlendrehwürmer:

  Der 2. Summand muss dabei jeweils durch Vertauschen der Reihenfolge der Ziffern des ersten Summanden entstehen:

1 5 4	6 0 5	
4 5 1	5 0 6	
6 0 5	1 1 1 1	(ein Drehwurm!!!)

  Es machte meinen Schülern großen Spaß nach Drehwürmern zu suchen mit ihren Telefonnummern, Körpergrößen, Postleitzahlen……

- Dreiersummen mit drei zweistelligen Zahlen:

  Aus sechs beliebigen Ziffernkärtchen werden drei zweistellige Zahlen gelegt und schriftlich addiert, dann werden fortlaufend je zwei Kärtchen vertauscht und jedes Mal neu berechnet.

  Die Schüler sollen anschließend begründen warum das Ergebnis größer oder kleiner wird bzw. gleich bleibt.

  Die abschließende Frage könnte lauten: Wie kann man die größte bzw. die kleinste Summe erhalten? (Begründen lassen!)

- Zweiersummen mit zwei dreistelligen Zahlen:

  Aus den neun Ziffern werden 6 ausgewählt. Beginnend bei einer Zweiersumme werden nun immer je zwei Ziffern vertauscht:

  Z.B.: 2,3,4,5,6,7,

532	352	352	
467	467	476	
999	819	828	usw.

- Spiegelzahlen (Zahlenpalindrome) selbst erzeugen:

  Man addiert zu einer beliebigen Zahl deren umgekehrte Ziffernfolge. Manchmal erhält man gleich eine Spiegelzahl (ANNA- oder OTTOzahl), manchmal muss man dafür etwas länger rechnen.

3.4 Die schriftliche Subtraktion

3.4.1 Darstellung und Diskussion der einzelnen Verfahren

Bei der schriftlichen Subtraktion gibt es verschiedene Möglichkeiten der Berechnung.

Die verschiedenen Verfahren lassen sich gliedern nach:

- der Bestimmung der Differenz (durch Abziehen oder Ergänzen)
- der Art des Stellenübergangs
    - durch Entbündeln
    - durch gleichsinniges Verändern von Minuend und Subtrahend
    - durch Auffüllen des Subtrahenden zum Minuenden

Eine übersichtliche Gegenüberstellung der einzelnen Verfahren findet man im Handbuch für den Mathematikunterricht 3. Schulstufe von Radatz u.a. 1999, S. 132:

Behandlung des Stellenübergangs	Berechnung der Differenz/Rechenrichtung			
	Abziehen (Minus-Sprechweise)		Ergänzen (Plus-Sprechweise)	
Entbündeln	8'6'^{10}2^{10} -3 8 7 4 7 5	2 – 7 geht nicht. Ich wechsle 1 Zehner in 10 Einer um. 12 - 7 = **5**. Es sind noch 5 Zehner ...“	8'6'^{10}2^{10} -3 8 7 4 7 5	„7 + __ = 2 geht nicht. Ich wechsle 1 Zehner in 10 Einer um. 7 + **5** = 12. Es sind noch 5 Zehner ...“
Erweitern	8 6^{10}2^{10} -3$_1$8$_1$ 7 4 7 5	„2 – 7 geht nicht. Ich erweitere oben mit 10 Einern und unten mit einem Zehner. 12 - 7 = **5** ...“	8 6^{10}2^{10} -3$_1$8$_1$ 7 4 7 5	“7 + __ = 2 geht nicht. Ich erweitere oben mit 10 Einern und unten mit 1 Zehner. 7 + **5** = 12 ...“
Auffüllen			8 6 2 -3$_1$ 8$_1$ 7 4 7 5	“7 + **5** = 12. Das sind die geforderten 2 (Einer) und 1 Zehner für die nächste Spalte ...“

Abbildung 8: Gegenüberstellung der Subtraktionsverfahren

In unserem Nachbarland Deutschland ist die Wahl des Verfahrens dem Lehrer großteils frei gestellt. In Bayern wird das Entbündeln aber sogar verpflichtend gefordert. Der österreichische Lehrplan der Volksschulen verlangt das Ergänzungsverfahren.

Radatz u.a. (1999) nennen folgende Argumente gegen eine Festlegung auf das Ergänzungsverfahren als Normalverfahren für die schriftliche Subtraktion:

- **Internationale Isolation:** Weltweit ist das Abziehen mit Entbündeln das am häufigsten verwendete.
- **Unverstandener Algorithmus:** Zur Vorbereitung auf das Verfahren des Ergänzens mit der Erweiterungstechnik wird im Unterricht zuvor das Gesetz von der Konstanz der Differenz bei gleichsinniger Veränderung von Minuend und Subtrahend thematisiert:

Ein typisches Unterrichtsbeispiel: Zwei Kinder vergleichen den Unterschied ihrer Körpergröße, steigen dann (mit großen Vergnügen) auf einen Sessel und stellen fest, dass der Unterschied gleich bleibt!

Dass dies etwas mit dem späteren Hinzufügen von 10 Einern beim Minuenden und einem Zehner beim Subtrahenden zu tun hat, wird damit kaum einen Kind deutlich werden.

„Nicht selten enden alle unterrichtlichen Bemühungen um Einsichtsvermittlung in einem resignierenden Zufriedengeben damit, dass die Kinder wenigstens die Technik beherrschen" (Radatz u.a., 1999).

Diese Aussage der Autoren kann ich völlig bestätigen. Auch ich musste diese Erfahrung schon machen. Wenn man nämlich einige Zeit nach der Erarbeitung des Verfahrens die Schüler nach der Bedeutung der kleinen Eins (=Übertrag) befragt, bekommt man oft als Antwort: „Weil wir das so gelernt haben."

Mein „Förderkind Lisa" befragte ich auch danach, kurz nach dem in ihrer Klasse die schriftliche Subtraktion eingeführt wurde. Ihre Antwort lautete: „Das hat uns die Frau Lehrer so gelernt." Es stellte sich heraus, dass Lisa nicht einmal ansatzweise eine Einsicht in ein Monotoniegesetz gewonnen hatte. Ihre Lehrerin hatte es wohl nicht einmal versucht, den Kindern eine Einsicht näher zu bringen. Dies ist, so glaube ich, leider eine häufige Unterrichtspraxis vieler Lehrer: Der Lehrer steht an der Tafel und zeigt den Kindern wie es (in diesem Fall die schriftliche Subtraktion) geht.

Dass eine derartige Unterrichtspraxis den Lehrplanforderungen nicht gerecht wird sollte nicht extra erwähnt werden müssen. Ein reines Vermitteln von mechanischer Rechenfertigkeit sollte heutzutage in einem modernen Mathematikunterricht keinen Platz mehr haben.

Denn nur auf Einsicht zielende Unterrichtsmaßnahmen können grundsätzlich zu besseren Leistungen führen.

Meiner Meinung nach sollte die Eingrenzung, die uns österreichischen Lehrern durch den Lehrplan auferlegt ist, endlich überdacht werden und die Methodenfreiheit des Lehrers nicht weiter durch die Vorgabe des Ergänzungsverfahren bei der schriftlichen Subtraktion eingeschränkt werden.

Freilich müssten in Lehrerfortbildungen die meisten Lehrer die verschiedenen Methoden erst einmal selbst kennen lernen, um überhaupt zwischen den verschiedenen Verfahren frei wählen zu können.

Denn erst kürzlich meinte eine Kollegin in einem Gespräch, in dem ich die verschiedenen Verfahren ansprach, völlig erstaunt, dass sie bis heute der Meinung gewesen sei, dass man weltweit so subtrahieren würde wie bei uns in Österreich.

Eine derartige Öffnung des Lehrplans würde den Lehrer/innen nicht nur die Freiheit gewähren, sich für das aus ihrer Sicht sinnvollere Verfahren zu entscheiden, sondern würde didaktische Möglichkeiten für die Förderung leistungsstarker Rechner im Sinne einer inneren Differenzierung eröffnen. Z.B.: „So rechnen Kinder in anderen Ländern.“

In meiner Klasse erarbeitete ich heuer „lehrplantreu“ die Subtraktion auf gewohnte Weise mit der Ergänzungsmethode. Ich musste feststellen, dass die Eltern den Kindern zuhause schon die schriftliche Subtraktion erklärt hatten. Darüber war ich natürlich nicht sehr erfreut. Ein anderer Weg der Berechnung hätte die Kinder dann wohl völlig verwirrt. Ein weiterer Grund warum ich bei der gewohnten Art und Weise der Vermittlung des Verfahrens geblieben bin, ist die Tatsache, dass ich im kommenden Schuljahr nicht mehr an der Schule sein werde.

Radatz u.a. (1999) nennen folgende Vorteile des Abziehverfahrens:

- Abziehen entspricht den Vorerfahrungen der Kinder zum Kopfrechnen und zum halbschriftlichen Rechnen.
- Das Verfahren ist mit Material leicht einsehbar und begründbar, da das Entbündeln einer Einheit in zehn nächst kleinere verständlich ist.
- Das Entbündeln hier ist die Umkehrung des Bündelns bei der schriftlichen Addition
- Umformungen erfolgen ausschließlich beim Minuenden, so dass keine Interferenzen mit dem Übertrag bei der schriftlichen Addition entstehen können. (vgl. Radatz u.a. 1999)

Radatz u.a. (1999) nennen aber auch zwei Nachteile des Abziehverfahrens:

- Aufgaben mit einer oder mehrer Nullen im Minuenden sind nicht einfach. Ein gezieltes Üben solcher Aufgaben ist wichtig!
- Subtraktionen mit mehreren Subtrahenden sind beim Entbündeln schwierig. Dies ist aber auch beim Ergänzungsverfahren der Fall! Die Lösung dafür: Zwei Teilaufgaben lösen!

Einen Vorschlag für die Erarbeitung des Abziehverfahrens mit Zehner – Systemblöcken findet man in: Radatz u. a. 1999, S. 135 f.

3.4.2 Übungsanregungen und Problemstellungen:

Folgende Übungsanregungen (aus: Radatz u.a. 1999 und Quak u.a. 2006) eignen sich meiner Meinung nach als Einstieg in die Mathematikstunde, zwischendurch als Auflockerung oder als „Lückenfüller“. Im Abteilungsunterricht haben sich solche „Lückenfüller“ für mich sehr bewährt, da es oft der Fall ist, dass mich eine Schulstufe noch „braucht“, Kinder von der anderen Stufe aber ihre Arbeiten schon erledigt haben. In meiner Klasse liegen stets Ziffernkärtchen auf, um diese Schüler dann zum Beispiel mit folgenden Aufgabenstellungen beschäftigen zu können:

- Zielzahl 300:

  Die Ziffern für Minuend und Subtrahend werden erwürfelt. Die Würfelzahlen werden in ein Leerschema mit sechs Feldern (für Subtraktion zweier dreistelliger Zahlen) geschrieben. Die Würfelzahlen sollen so angeordnet werden, dass bei der anschließenden Subtraktion das Ergebnis 300 möglichst nahe erreicht wird.

- Subtraktion beliebiger dreistelliger Zahlen:
  6 Ziffernkärtchen werden ausgewählt. Ausgehend von einer damit gebildeten Subtraktionsaufgabe werden durch das Vertauschen der Kärtchen neue Aufgaben gebildet. Veränderungen der Differenz sollten erklärt werden!

- Maximale und minimale Differenz:
  Aus sechs Ziffernkärtchen soll die Subtraktion mit der kleinsten und größten Differenz gefunden werden!

- Zahlen erreichen:
  Die Schüler sollen als Ergebnis der Subtraktion eine Zahl erreichen oder dieser möglichst nahe kommen!

- Zauberzahl 6174 (Kaprekarzahl):
  Entdeckt wurde diese „Zauberzahl“ vom indischen Mathematiker KAPREKAR.

  Aus vier Ziffern wird die größte und kleinste Zahl gebildet und voneinander subtrahiert. Mit den so gewonnen neuen Ziffern verfährt man ebenso und immer so weiter. Nach höchstens sieben Schritten erhält man immer wieder die Zahl 6174!

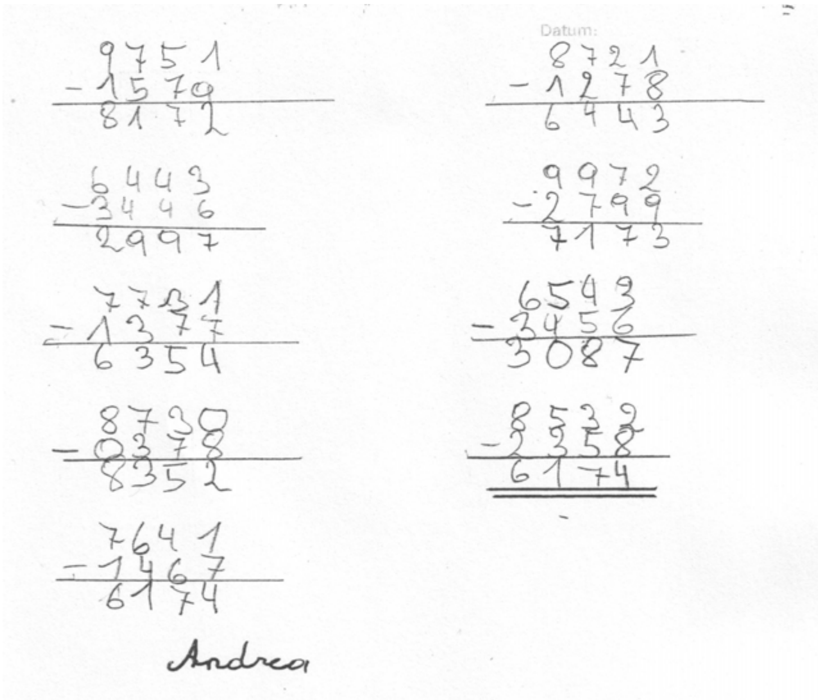


Abbildung 9: Berechnung der Kaprekarzahl

- Minustürme:

  Aus drei beliebigen Ziffern wird die größtmögliche und kleinstmögliche, dreistellige Zahl gebildet und subtrahiert.

  Nach dem einige solche Rechnungen gerechnet wurden, lassen sich folgende Entdeckungen machen:

  - die Zehnerstelle jeder Differenz ist immer: 9
  - die Summe aus Hunderterziffer und Einerziffer ist: 9
  - es sind nur folgende 8 Zahlen als Ergebnis möglich: 198, 297, 396, 891, 792, 693, 594, 495 → ab dieser Zahl wiederholen sich die Rechnungen!

3.4.3 Vermischte Übungen (Addition und Subtraktion)

- Immer 1089 (vgl. Wittmann/Müller 1994, S. 40)

  Zu Beginn steht wieder eine dreistellige Zahl, deren Ziffern nicht alle gleich sind. Zuerst wird mit der Umkehrzahl die Differenz gebildet, zu der anschließend deren Umkehrzahl addiert wird. Die Nullen müssen berücksichtigt werden.

  Als Endergebnis ergibt sich stets die Zahl 1089.

- Zahlenhäuser (vgl. Wittmann/ Müller 1994, S. 45):

  Im Zahlenhaus wohnen zwei Zahlen. Deren Summe wohnt im Dachgeschoß und deren Differenz im Keller. Weil allen Zahlen das Haus zu eng wird, ziehen die Summe und die Differenz in das Erdgeschoß eines neuen Hauses. Wieder kommt die Summe dieser beiden Zahlen ins Dachgeschoß und die Differenz in den Keller. In so einer Zahlenhaus – Reihe verdoppeln sich die Zahlen des Dachbodens und des Kellers jeweils beim übernächsten Haus.

  Zahlenhaus –Rechnungen lassen sich schön in eine Geschichte verpacken und die 1. Häuserzeile kann dabei schön auf der Tafel entstehen!

  Sie eignen sich auch für folgende Denkaufgaben: Gegeben ist eine Häuserzeile mit vier Häusern. Im Obergeschoß des 3. Hauses stehen zwei Zahlen. Die Schüler sollen versuchen, die leeren Felder auszufüllen!

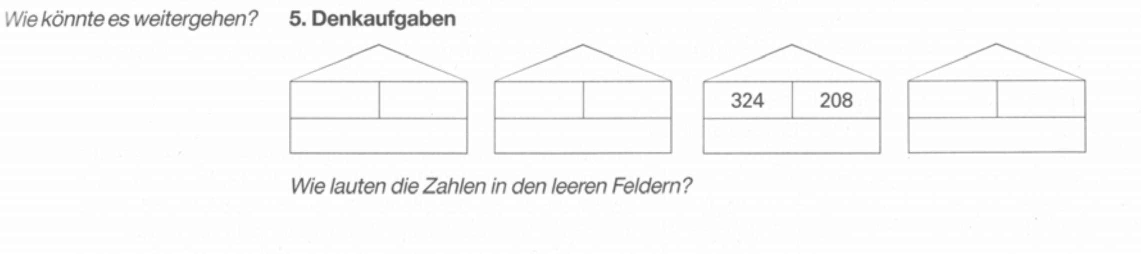


Abbildung 10: Zahlenhäuser Denkaufgabe

- EDE-, MIMI- OTTO-, ANNA-, NANA-, TILL- und CANCAN- Zahlen (vgl. Quak 2006, S. 200 ff)

  Derartige Zahlen weisen eine besondere Struktur auf. Rechnungen mit ihnen führen zu besonderen Ergebnissen, die die Kinder zum Forschen, Erklären und Begründen ihrer Entdeckungen anregen. Einige Beispiele dafür sind:

  EDE – Zahlen sind z.B.: 212, 323, 545, 636, 424,…….

  Additionen mit EDE-Zahlen schauen so aus:

212	323	636
121	232	363
333	**555**	**999**

Eine EDE-Rechnung mit Übertrag:

$$\begin{array}{r} 595 \\ \underline{959} \\ \mathbf{1\,554} \end{array}$$

…es entstehen „Zauberzahlen“ mit drei gleichen Ziffern, wenn aber bei der Rechnung ein Übertrag entsteht, kann man entdecken, dass die Summe der Tausenderziffer und der Einerziffer die Ziffer der Zehner- und Hunderterstelle ergibt!

Die Subtraktion von EDE-Zahlen ergibt ebenfalls merkwürdige Zahlen:

$$\begin{array}{rrr} 212 & 323 & 636 \\ \underline{-121} & \underline{-232} & \underline{-363} \\ \mathbf{91} & \mathbf{91} & \mathbf{273} \end{array}$$

Mögliche Entdeckungen: Die errechnete Differenz ist immer 91 oder ein Vielfaches davon! Die Summe der Einer- und Zehnerziffer ist immer 10!

ANNA –Zahlen sind z. B.: 1001, 2112, 4334, …

Wenn man die kleinere ANNA-Zahl von der größeren subtrahiert, ergeben sich nur ganz bestimmte Ergebnisse. Entdeckungen: ANNA-Zahlen, bei denen der Unterschied der beiden Ziffern gleich groß ist, haben auch das gleiche Ergebnis (=Gesetz der Konstanz der Differenz):

$$\begin{array}{rrr} 4\,114 & 5\,225 & 6\,336 \\ \underline{-\,1\,441} & \underline{-2\,552} & \underline{-3\,663} \\ \mathbf{2\,673} & \mathbf{2\,673} & \mathbf{2\,673} \end{array}$$

Weitere Entdeckungen: Die Einerziffer ist immer um eins größer als die Tausenderziffer. Einer- und Hunderterziffer ergeben zusammen 9, ebenso die Zehner- und Tausenderziffer! Die Ziffernsumme aller möglichen Ergebnisse ist 18! Alle Ergebnisse sind Vielfache des kleinsten Ergebnisses 891!

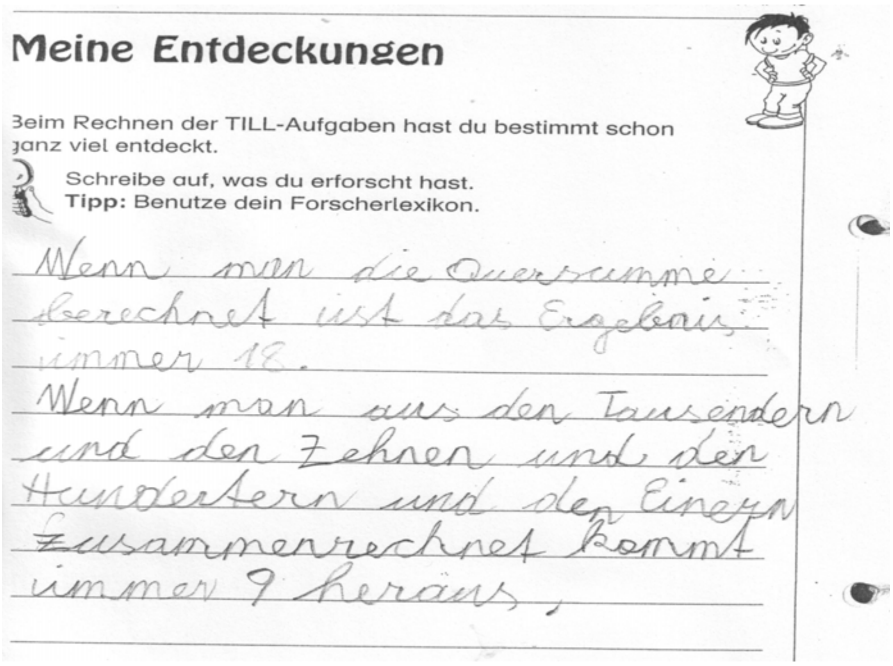
3.4.4 Arbeit mit dem Forscherheft

Im Buch: „Kinder erforschen Zahlenmuster“ (siehe Literaturliste) findet man die Kopiervorlagen für ein „Forscherheft“ in dem die ANNA-, NANA- TILL- u ä. Zahlen von Kindern erforscht werden können.

Ich musste feststellen, dass ich nicht allen Kindern große Freude mit dem Forschen bereitete. Deshalb wurde das Zahlenforscherheft von mir im „offenen Mathematikunterricht“ eingesetzt. Das heißt, es beschäftigten sich nur die Schüler mit dem Forscherheft, die dies auch wirklich selbst wollten und denen es auch Spaß machte. Trotzdem war zu beobachten, dass es den Kindern anfangs schwer fiel, ihre Entdeckungen in Worten zu formulieren. Die beiliegenden Tippkarten halfen dabei und wurden auch mit Freude benützt. Je öfter jedoch geforscht wurde, umso leichter fiel schließlich auch das Verbalisieren. Die Schüler, die nicht forschen wollten, griffen zu herkömmlichen Übungsaufgaben oder zu Lernspielen wie z. B. Rechenpuzzles.

Abbildung 11: Roland arbeitet mit dem Forscherheft

Seine Schwester Lisa aus der zweiten Schulstufe machte bei den Till-Aufgaben folgende Entdeckungen:


Meine Entdeckungen

Beim Rechnen der TILL-Aufgaben hast du bestimmt schon ganz viel entdeckt.

Schreibe auf, was du erforscht hast.
Tipp: Benutze dein Forscherlexikon.

Wenn man die Quersumme berechnet ist das Ergebnis immer 18.
Wenn man aus den Tausendern und den Zehnen und den Hundertern und den Einern zusammenrechnet kommt immer 9 heraus.

Abbildung 12: Forschergebnis TILL-Aufgaben

Ihr Bruder (4. Schulstufe) rechnete folgende TILL-Aufgaben:

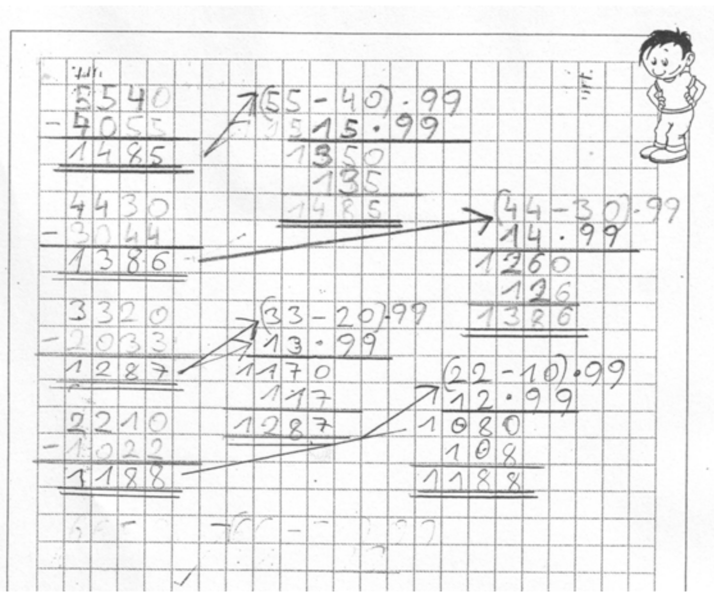


Abbildung 13: TILL-Aufgaben

Die ANNA-Aufgaben machten den Kindern Spaß und zum Entdecken gab es einiges:

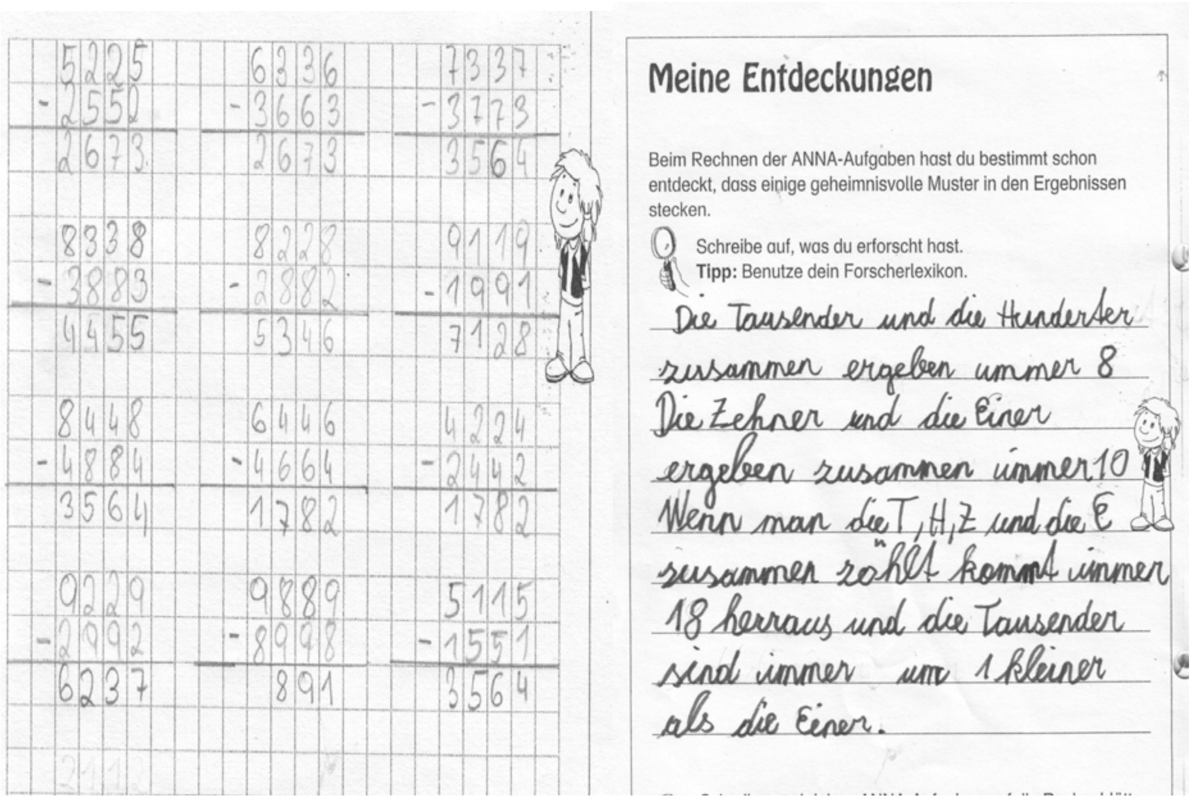


Abbildung 14: Forschergebnis ANNA -Aufgaben

3.5 Die schriftliche Multiplikation

Radatz u. a. (1999) nennen als Kernstück des Multiplizierens zwei- und mehrstelliger Zahlen die Einsicht in das Verteilungsgesetz (Distributivgesetz): 6 • 18 =6 • 10 + 6 • 8

Der Bearbeitungsprozess besteht aus 3 Schritten:

1) Zerlegen einer Zahl in Zehner und Einer (18 = 10 + 8)
2) Multiplizieren jeder Teilzahl (6 • 10 und 6 • 8)
3) Addieren der Teilergebnisse

Der Lösungsweg über die Zerlegung in Stellen ist allerdings nicht der einzige. Andere Möglichkeiten anhand des gleichen Beispiels wären:

6 • 18 = 6 • 15 + 6 • 3 oder

6 • 18 = 6 • 9 + 6 • 9 oder

6 • 18= 5 •18 + 1 •18 oder

6 • 18 = 6 • 20 – 6 • 2 u. ä.

Für das Rechnen großer Einmaleinsaufgaben sind noch weitere Gesetze wichtig:

- Das Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz): 18 • 6 = 6 • 18
- Das Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz): 6 • 6 • 3 = 6 • 18 oder 36 • 3
- Das Ausgleichsgesetz. 6 • 18 = 12 • 9 = 3 • 36

Um den Schülern Einsichten in diese Gesetzmäßigkeiten zu ermöglichen, sind eine sorgfältige Erarbeitung und ein ausführliches operatives Durcharbeiten notwendig (vgl. Radatz u.a., 1999).

3.5.1 Veranschaulichung von Multiplikationsaufgaben

- Zehner - Systemblöcke

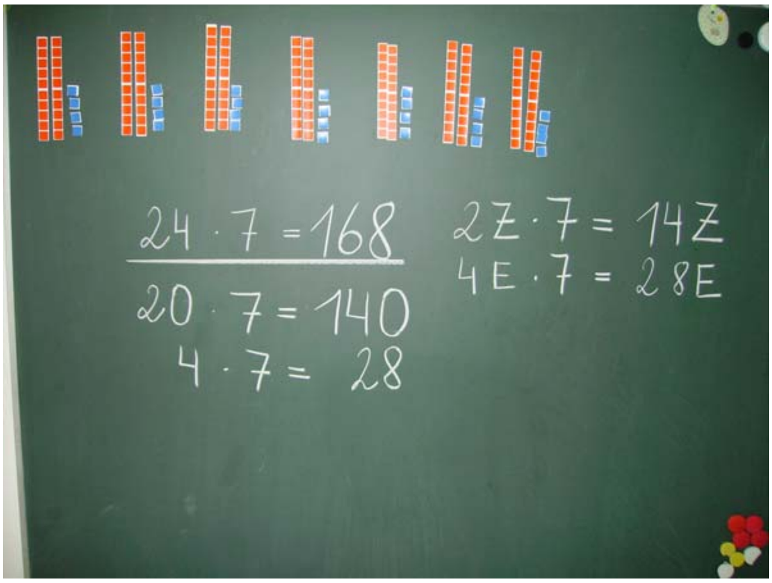


Abbildung 15: Zehner – Einer- Magnetmaterial

Mit Hilfe der Zehner – Systemblöcke können Aufgaben des großen Einmaleins erarbeitet und dargestellt werden. Operative Beziehungen und somit verschiedene Lösungswege sind nicht erkennbar (vgl. Radatz u.a. 1999, S. 102).

Besser eignet sich da der:

- Tausenderstreifen:

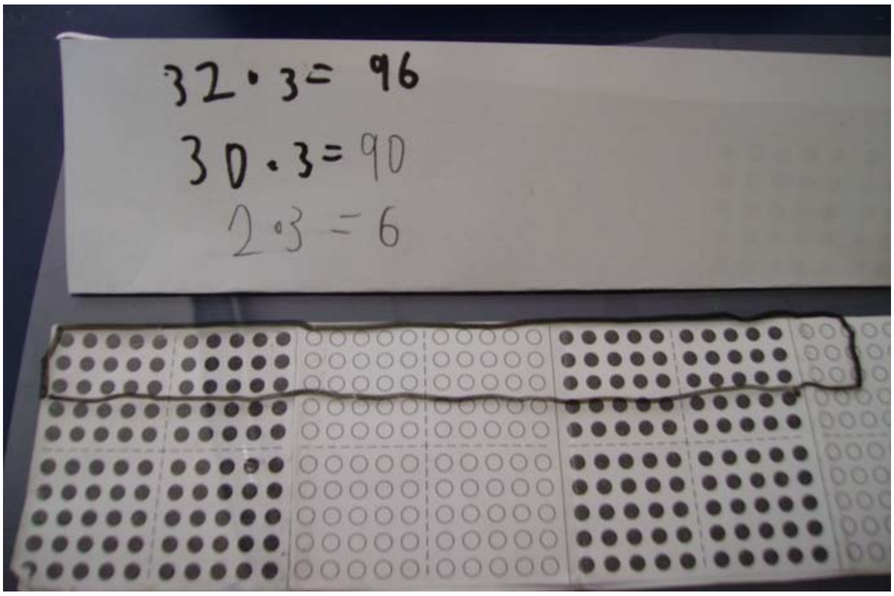


Abbildung 16: Multiplikationen veranschaulicht am Tausenderstreifen

Ich ließ den Kindern über den Tausenderstreifen eine Folie legen. So konnten sie mit speziellen Folienstiften die Multiplikation einkreisen. Lukas entdeckte nach dem Einkreisen die Teilmultiplikationen und notierte sie unter der gegebenen Multiplikationsaufgabe (siehe Abb. 17).

- Vierhunderterfeld

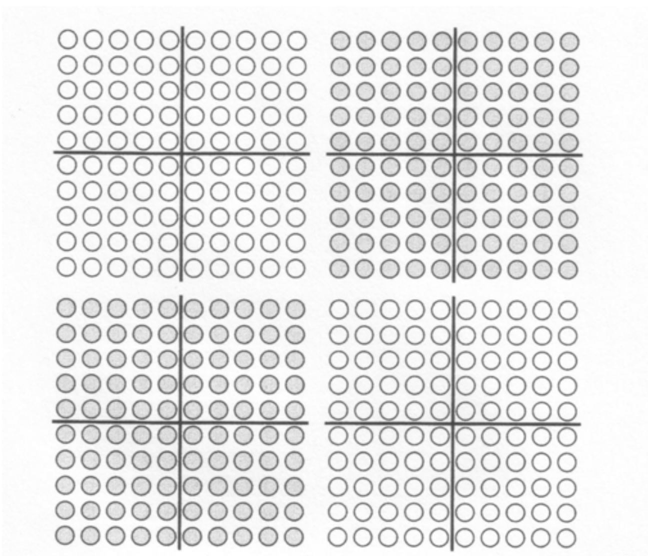


Abbildung 17: Vierhunderterfeld (Wittmann/Müller 1992)

Es ist auch sehr flexibel und die Aufgaben des „Großen Einmaleins“ (bis 20 • 20) können in einem sogenannten Malkreuz dargestellt werden:

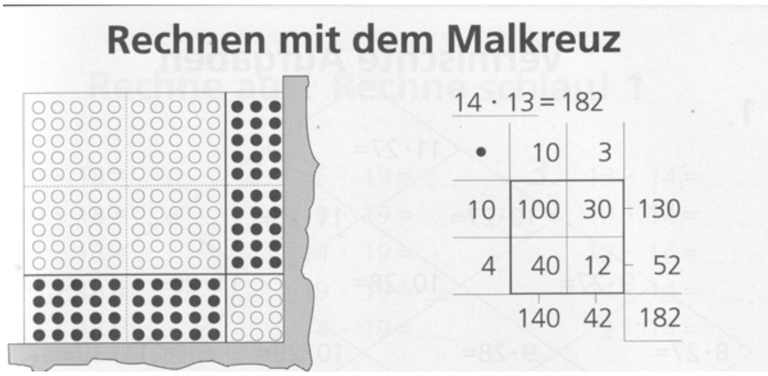


Abbildung 18: Malkreuz aus Wittmann/Müller, 1994 , Anhang 3/11

3.5.2 Multiplikationen mit einstelligem Multiplikator

Als Einstieg empfiehlt sich eine herausfordernde Aufgabe wie z. B.: Wie viele Stunden hat eine Woche?

Dies sind die Ergebnisse, zu denen meine Schüler kamen:

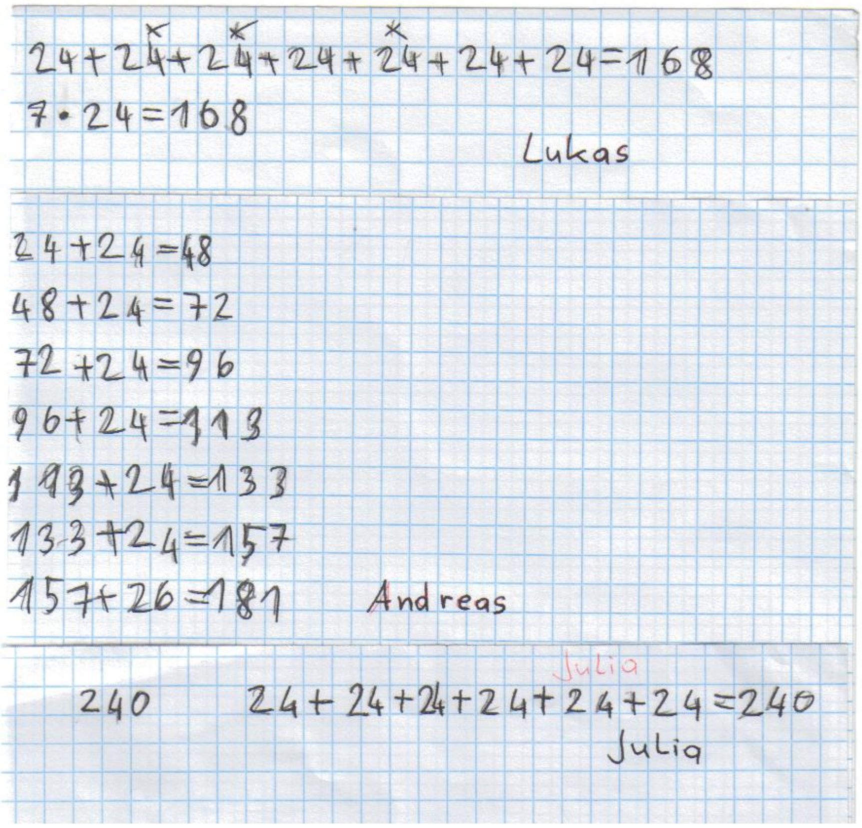


Abbildung 19: Mögliche Lösungswege

Lukas fand die richtige Lösung heraus. Andreas und Julia (zwei leistungsschwache Schüler) erreichten zwar nicht das richtige Ergebnis, aber sie fanden einen möglichen Lösungsweg!

Am schnellsten hatte Lisa (2. Schulstufe) das Ergebnis parat. Als ich sie bat, mir ihren Lösungsweg zu erklären meinte sie: "Das ist ja eh ganz einfach: 10 + 10 = 20, 70 + 70 = 140, 4 • 7 = 28 also 168" Das sagte sie so schnell, dass es mir kaum möglich war, ihren Worten zu folgen. Inzwischen war meine Kollegin (die anwesende Sonderpädagogin) neugierig geworden und Lisa erklärte uns beiden nochmals ihren Lösungsweg. Gemeinsam schafften wir es dann, Lisas Lösungsweg gedanklich nachzuvollziehen.

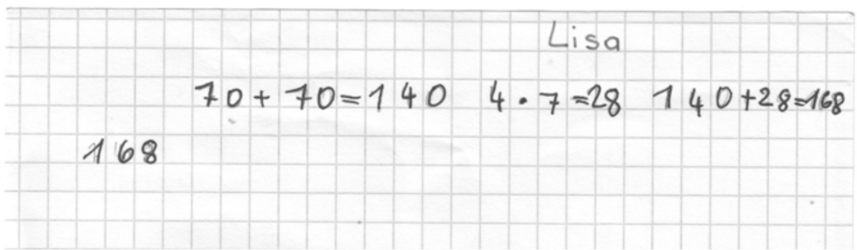


Abbildung 20: Lisas Lösungsweg

Der häufigste Lösungsweg wird meist die zu diesem Zeitpunkt bereits bekannte, schriftliche Addition sein. Die Besprechung der Lösungswege gibt dann „Anlass" zur Erarbeitung der schriftlichen Multiplikation:

$$24 \cdot 7 = \begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ 24 \\ 24 \\ 24 \\ 24 \\ \underline{24} \\ \underline{\underline{\mathbf{168}}} \end{array}$$

Die mögliche Sprechweise des Lehrers könnte so lauten: „ Wie bei jeder Addition beginnen wir mit der Einerstelle. Statt umständlich 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 rechnen wir 7 • 4 = 28. Wir schreiben 8 an, 2 (Zehner) weiter. Statt 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 rechnen wir 7 • 2 = 14 plus die 2 Zehner ist gleich 16. Das Ergebnis lautet: 168"

Der gleiche Vorgang in verkürzter Schreibweise ergibt: $\begin{array}{l} \underline{24 \cdot 7} \\ 168 \end{array}$

Es empfiehlt sich, den Schülern anfangs immer wieder beide Versionen anschreiben zu lassen (vgl. Gaidoschik, 2006).

Natürlich könnte für die Erarbeitung anstatt des zweistelligen auch ein dreistelliger Faktor stehen.

3.5.3 Schriftliches Multiplizieren mit zweistelligem Multiplikator

Die Grundlage dafür bildet das Multiplizieren mit 10. Hierfür ist es wichtig, dass die Schüler das Wesen des Verzehnfachens (Einer werden zu Zehnern, Zehner zu Hundertern, Hunderter zu Tausendern usw.) verstanden haben.

Daraus ergibt sich: Das Multiplizieren mit einer reinen Zehnerzahl entspricht dem Multiplizieren mit der entsprechenden Einerzahl, aber eine Stelle vorgerückt:

$4 \bullet 7 = 28 \qquad 4 \bullet 70 = 280$

Auf dieser Grundlage werden dann auch folgenden Rechnungen gelöst:

$$\begin{array}{r} \underline{324 \bullet 6} \\ 1944 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{324 \bullet 60} \\ 19440 \end{array}$$

Erst wenn die Multiplikation mit reinen Zehnerzahlen ausreichend automatisiert wurde, sollte mit gemischten Zehnerzahlen multipliziert werden.

Erforderte Einsicht: $324 \bullet 34 = 324 \bullet 30 + 324 \bullet 4$

Die Schüler sollten also begreifen (und dies auch formulieren können), dass bei einer Multiplikation mit dem Multiplikator 34, zuerst mal 30 und dann mal 4 (und nicht mal 3 und mal 4) gerechnet wird.

Es empfiehlt sich die Notation in ausführlicher Form:

$$324 \cdot 34 \quad = \quad \begin{array}{r} \underline{324 \bullet 30} \\ 9720 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r} \underline{324 \bullet 4} \\ 1296 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9720 \\ \underline{1296} \\ 11\,016 \end{array}$$

Die Kurzform:

```
 324 •34
 9720
  1296
11016
```

Meiner Erfahrung nach empfiehlt es sich, die Schüler die Null der Zehner – Teilrechnung einen längeren Zeitraum hindurch anschreiben zu lassen und immer wieder zu fragen, woher sie denn kommt. Ebenso sollte später, wenn die Null nicht mehr angeschrieben wird und die Stelle eingerückt wird, das „Einrücken“ immer wieder „hinterfragt“ werden.

Also auch nach der Automatisation sollte es immer wieder zu Fragen zum Verständnis kommen (vgl. Gaidoschik, 2006).

3.6 Operative Übungen zur schriftlichen Multiplikation:

- Klecksaufgaben: ✹ 687 • 3

  17 ✹✹✹

- Offene Aufgabe der Woche, z.B.:

  Die Zahlen 1 bis 5 sollen in ein Leerschema (✹✹✹ • ✹✹) so eingefügt werden, dass ein möglichst großes Produkt entsteht. (Variation: Kleines Produkt)

- Spiegelzahlen – Multiplikation:

```
  34•86        43•68
 2720          2580
  204           344
 2924          2924
```

  Gilt dies immer, dass das gleiche Ergebnis herauskommt?
  Gibt es weitere Zahlenpaare mit dieser Eigenschaft?
  Was ist die gemeinsame Eigenschaft dieser besonderen Zahlenpaare?

- Faktor 100 ist versteckt:
  Eine dreistellige Zahl wird mit 25 multipliziert und das Ergebnis dann mit 4. Was fällt auf wenn man Ausgangszahl und Endzahl vergleicht?

- Neun Mal die Lieblingszahl:
  Die Zahlenfolge: 123456789 wird mit der „Lieblingszahl“ multipliziert. Ist die Lieblingszahl z.B. „4“, so lautet die Rechnung: 123456789 · 4. Das Ergebnis dieser Multiplikation wird mit 9 multipliziert. Das Ergebnis besteht dann aus den Ziffern der Lieblingszahl (vgl. Schipper u.a. 2000).

3.7 Schriftliche Division

3.7.1 Vorbemerkungen

Das schriftliche Dividieren, vor allem durch zweistelligen Divisor, ist ein sehr anspruchvolles Verfahren. Sie erfordert vom Schüler folgende rechnerischen Voraussetzungen:

- Sicheres Beherrschen des kleinen Einmaleins
- Gewisse Geläufigkeit beim großen Einmaleins
- Schnelles Anwenden der Überschlagsrechnung und ein sicheres Beherrschen der schriftlichen Subtraktion

Ebenso erfordert sie das Verständnis für die Verfahrensschritte und das Behalten der Übersicht über den komplexen Vorgang. Die schriftliche Division stellt daher oft einen programmierten Stolperstein dar (vgl. Gaidoschik, 2006).

Eine Diskussion über eine Lehrplanänderung fände ich im Bereich der schriftlichen Division für angebracht. Die Zeit, die man benötigt bis sie erarbeitet und mechanisiert ist, fehlt häufig anderwärtig, angesichts der Stofffülle, die wir im Mathematikunterricht zu bewältigen haben.

Wenn man bedenkt, dass die Schüler spätestens ab der dritten Sekundarstufe bei einer Division ohnehin zum Taschenrechner greifen, wäre es sinnvoll, mehr Zeit in die Entwicklung von „Größengefühl“, „Schätz- und Überschlagstechniken“ zu investieren. Unmögliche Ergebnisse durch „Tippfehler“ würden dann vielleicht auch leichter von den Schülern entdeckt werden (vgl. Gaidoschik, 2006).

In Deutschland wird die schriftliche Division durch einstelligen Divisor zumeist erst in der vierten Schulstufe erarbeitet. Divisionen mit zweistelligem Divisor sind nicht Stoff der Grundschule. Manchmal wird bis maximal 20 als Divisor dividiert und eventuell noch durch reine Zehner (vgl. Gaidoschik, 2006).

Was sicherlich auch eine gewisse Einschränkung im Bereich der Sachaufgaben bedeutet.

3.7.2 Die Erarbeitung der schriftlichen Division mit einstelligem Divisor

Als Ausgangssituation empfiehlt sich wieder eine Sachaufgabe, die eine konkret handelnde Bearbeitung möglich macht:

„Drei Freunde spielen gemeinsam Lotto. Letztes Wochenende haben sie gemeinsam 963 Euro gewonnen. Diesen Gewinn teilen sie sich gerecht.“

Der Scheck der „Lottofee“ wird bei der Bank eingelöst: Neun 100er – Scheine, 6 Zehner und 3 Ein - Euro- Münzen. Nun geht es für die Schüler an ein konkretes Handeln mit Rechengeld, da der Betrag gerecht verteilt werden soll!

Die Handlungen sollten an der Tafel protokolliert werden!

Wichtig ist, dass die Schüler tatsächlich handeln. D.h. dreistellige Divisionen werden anfangs handelnd z. B. mit Rechengeld, aber auch mit Hundertertafeln, Zehnerstangen und Einerwürfeln vollzogen. Zunächst werden Dividenden gewählt, die beim Verteilen keinen Rest ergeben wie z.B.: 624 : 2 =

Später werden Aufgaben gewählt, bei denen beim Verteilen an einer Stelle ein Rest bleibt.

Z. B.: 854 : 2 =

Die Schüler sollten durch die Handlung selbst entdecken, dass der übrige Zehner in 10 Einer getauscht werden kann und so mit den 4 Einern als „14“ wieder problemlos aufgeteilt werden kann. Dadurch wird den Schülern auch einsichtig, dass beim Verteilen besser mit der größten Stelle begonnen wird.

Der nächste Schritt ist die Erarbeitung der Schreibweise:

Hier empfiehlt sich parallel zur Handlung zunächst ein getrenntes Anschreiben der Stellen am Beispiel 936 : 4 = sieht das so aus:

9 H : 4 =	9 H : 4 = **2 H**	2 H · 4 = 8 H →1 H Rest = 10 Z
3 Z : 4 =	13 Z : 4 = **3 Z**	3Z · 4 = 12 Z →1Z Rest = 10 E
6 E : 4 =	16 E : 4 = **4 E**	kein Rest!

Wenn dieser Ablauf automatisiert ist kann zur üblichen Sprech- und Schreibweise übergegangen werden (vgl. Gaidoschik, 2006).

3.7.3 Die schriftliche Division mit zweistelligem Divisor

Wichtige Vorraussetzungen:

- Verständnis von Dividieren als Verteilen und Enthaltensein
- Verständnis des schriftlichen Dividierens mit einstelligem Divisor
- Multiplizieren zweistelliger Zahlen im Kopf (4 · 32 = 4 · 30 + 4 ·2 = 128)
- Dividieren einer Zehnerzahl durch eine Zehnerzahl im Kopf (120 : 40 = 12 : 4 = 3)
- Überschlagendes Dividieren: Das Abschätzen, wie oft der Divisor in den (Teil-) Dividenden „hineinpasst", stellt beim Dividieren durch zweistelligen Divisor meist das Hauptproblem dar. Ein stetiges Trainieren von Schätztechniken bereits in der 3. Schulstufe wäre wichtig!
- Verständnis für die Rest –Berechnung bei (H)ZE : ZE außerhalb des schriftlichen Gesamt-Algorithmus (vgl. Gaidoschik, 2006).

Meiner Meinung nach ist es empfehlenswert, bei der Erarbeitung und in den folgenden Wochen den Schülern eine Merktafel mit den einzelnen „Verfahrensschritten" anzubieten.

3.7.4 Übungen zur Vertiefung des Verständnisses.

- Übungen mit Ziffernkärtchen:

  Vorgegeben ist wieder ein Schema: ☐☐☐☐ : ☐ =

  Die Vorgaben an die Schüler könnten folgendermaßen lauten:

  Wer findet Divisionsaufgaben ohne Rest?
  Wer erzielt das größtmögliche Ergebnis?
  Wer erzielt den größten Rest? u.ä.

- Fortgesetzte Divisionen:

  60 480 soll durch alle Zahlen von 9 bis 2 geteilt werden. Es stellt sich heraus, dass bei keiner einzigen Aufgabe ein Rest entsteht. 60 480 ist eine besondere Zahl. Die Schüler könnten versuchen selbst weitere solche besonderen Zahlen zu finden.

- Rechenpäckchen mit Struktur:

  Sie sollen auf ihre Fortsetzbarkeit hin überprüft werden. Z. B.

88	:	9 =	9	(7R)
888	:	9 =	98	(6R)
8888	:	9 =	987	(5R)
88888	:	9 =	_______	

Oder :

21	:	3 =	7
201	:	3 =	67
2001	:	3 =	667
20001	:	3 =	__

- Immer 222:

  Aus drei verschiedenen Ziffern werden 6 verschiedene dreistellige Zahlen gebildet. Die 6 Zahlen werden addiert, das Ergebnis wird durch die Quersumme der Ziffern dividiert. Das Ergebnis ist immer 222!

- Zurück zur Mittelzahl:

  Man addiert drei aufeinanderfolgende Zahlen und dividiert durch 3. Das Ergebnis ist die mittlere Zahl, was die Kinder zunächst sicherlich nicht vermuten!

3.7.5 Persönliche Erfahrungen mit der schriftlichen Division

In den vergangenen Jahren machte ich die Erfahrung, dass die schriftliche Division den Schülern keine großen Schwierigkeiten bereitete. Im heurigen Jahr allerdings stellte die Division durch zweistelligen Divisor für alle Schüler eine Herausforderung dar. Was natürlich auch mit der Zusammensetzung der Schülergruppe zu tun hat. Für Dominik, den rechenschwachen Schüler, und Max (ASO – Lehrplan) stellten die zweistelligen Divisionen heuer eine besonders schwere Hürde dar, die nur mit sehr großen Übungsaufwand bewältigt werden konnte.

Die Erarbeitung der Division durch einstelligen Divisor in der dritten Klasse kann ich noch nicht dokumentieren, da sie uns erst bevor steht.

4 Schlusswort

Rückblickend betrachtet war das Schuljahr 2006/07 für meine Schüler sicherlich ein abwechslungsreiches Schuljahr. Wie man in der vorliegenden Arbeit ersehen kann, probierte ich unterrichtspraktische Anregungen aus der Literatur immer wieder selbst aus. Die Sonderpädagogin aus meiner Klasse befindet sich in einer Ausbildung für Montessoripädagogik. Auch sie beglückte meine Schüler immer wieder mit ihrem neu erworbenen Wissen.

Wenn so manche Unterrichtsversuche auch nicht den erwünschten Erfolg erzielten oder, rückblickend betrachtet, didaktisch vielleicht doch nicht so sinnvoll waren, so möchte ich sie trotzdem nicht missen. Sie bringen für uns Lehrer mit Sicherheit einen Gewinn an Erfahrung. Wenn bei manchen Schülern der erhoffte Erfolg auch ausblieb, so hatten sie zumindest eine Abwechslung zum gewohnten Unterrichtsverlauf.

Vor einiger Zeit erklärte mir eine Kollegin, dass sie (nun schon fast 30 Jahre) mit dem gleichen Schulbuch arbeite, weil es sich bewährt hat. Diese Aussage machte mich nachdenklich – wie kann sich denn ein Schulbuch bewähren, das nie mit einem anderen unterrichtspraktisch verglichen wurde? Wie kann sich eine andere Unterrichtsmethode „bewähren“, wenn ich nicht bereit bin, gewohnte Bahnen zu verlassen?

Ich hoffe, dass diese Arbeit dazu Anstoß gibt, gewohnte *„Erarbeitungs- und Übungsformatbahnen“* zu verlassen, um die eine oder andere Anregung auszuprobieren. Für diese „Entdeckungsreise“ wünsche ich viel Mut und gutes Gelingen! Die Schüler werden es danken!

5 Literaturverzeichnis

Colin, Pierre Redouté: Spannende Mathematik: Bausteine zum Entdecken, Verstehen und Üben. Horneburg: Persen 2006

Gaidoschik, Michael: Unterricht und Förderung in der dritten und vierten Schulstufe, Skriptum zum Seminar. Wien 2006

Hoppius, Claudia: Kinder erforschen Zahlenmuster: Spannender Mathematikunterricht mit ANNA-, TILL- und NANA-Zahlen. Donauwörth: Auer Verlag 2006

Krauthausen, Günther / Scherer, Petra: Was macht ein Übungsbeispiel produktiv? In: Praxis Grundschule 1/2006

Müller, Heiner: Rechenreihen mit Pfiff: Operativ strukturierte Rechenübungen, 4. Schuljahr. Bergedorfer Kopiervorlagen. Persen

Quak, Udo / Sterkenburg, Sabine / Verboom, Lilo: Die Grundschulfundgrube für Mathematik. Berlin: Cornelsen 2006

Radatz, Hendrik / Schipper, Wilhelm / Ebeling,Astrid, Dröge,Rotraud: Handbuch für den Mathematikunterricht, 3. Schuljahr. Hannover: Schroedel, 1999

Scherer, Petra: Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern, Band 1: Zwanzigerraum. Horneburg: Persen, 2. Auflage 2006

Schipper, Wilhelm / Ebeling, Astrid / Dröge, Rotraud: Handbuch für den Mathematikunterricht, 4. Schuljahr. Hannover: Schroedel 2000

Wittmann, E. Ch.: Wider die Flutder „bunten Hund“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: Wittmann, Erich, Ch., Müller, Gerhard,N.: Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1. Stuttgart; Düsseldorf; Berlin; Leipzig: Klett 1994, 157 - 170

Wittmann, Erich, Ch. / Müller, Gerhard N.: Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1. Stuttgart; Düsseldorf; Berlin; Leipzig: Klett 1994

Wittmann, Erich, Ch. / Müller, Gerhard N.: Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2. Stuttgart; Düsseldorf; Berlin; Leipzig: Klett 1994