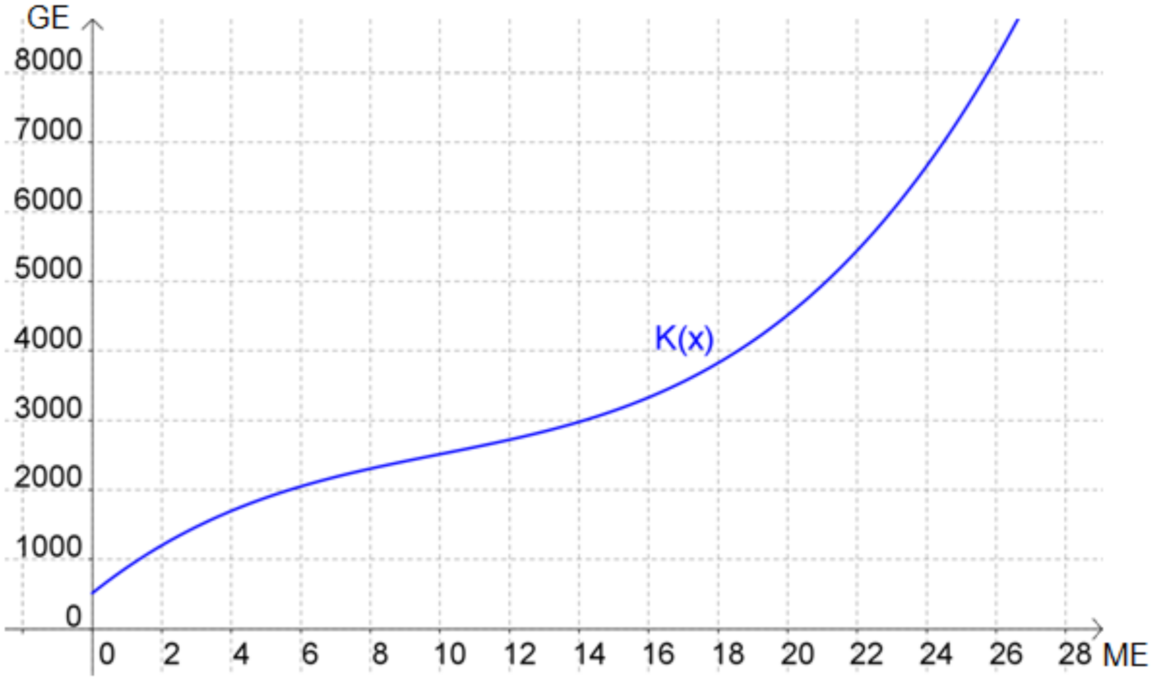
Expertengruppe A: Kostenfunktion

Gegeben ist eine Kostenfunktion 3. Grades $K(x) = x^3 – 30x^2 + 400x + 512$.



1. Lesen Sie aus obigem Funktionsgraphen ab:

a) Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der y-Achse:

b) Monotonieverhalten der Funktion:

c) Extrempunkte:

d) Wendepunkt:

e) In welchem Intervall ist die Funktion links- bzw. rechtsgekrümmt?

2. Nun sehen Sie sich bitte das Informationsvideo an.
http://www.youtube.com/watch?v=e3HzsR74U7M&feature=player_embedded

3. Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Geben Sie 3 Eigenschaften einer Polynomfunktion 3. Grades an, damit sie als Kostenfunktion verwendet werden kann:

-
-
-

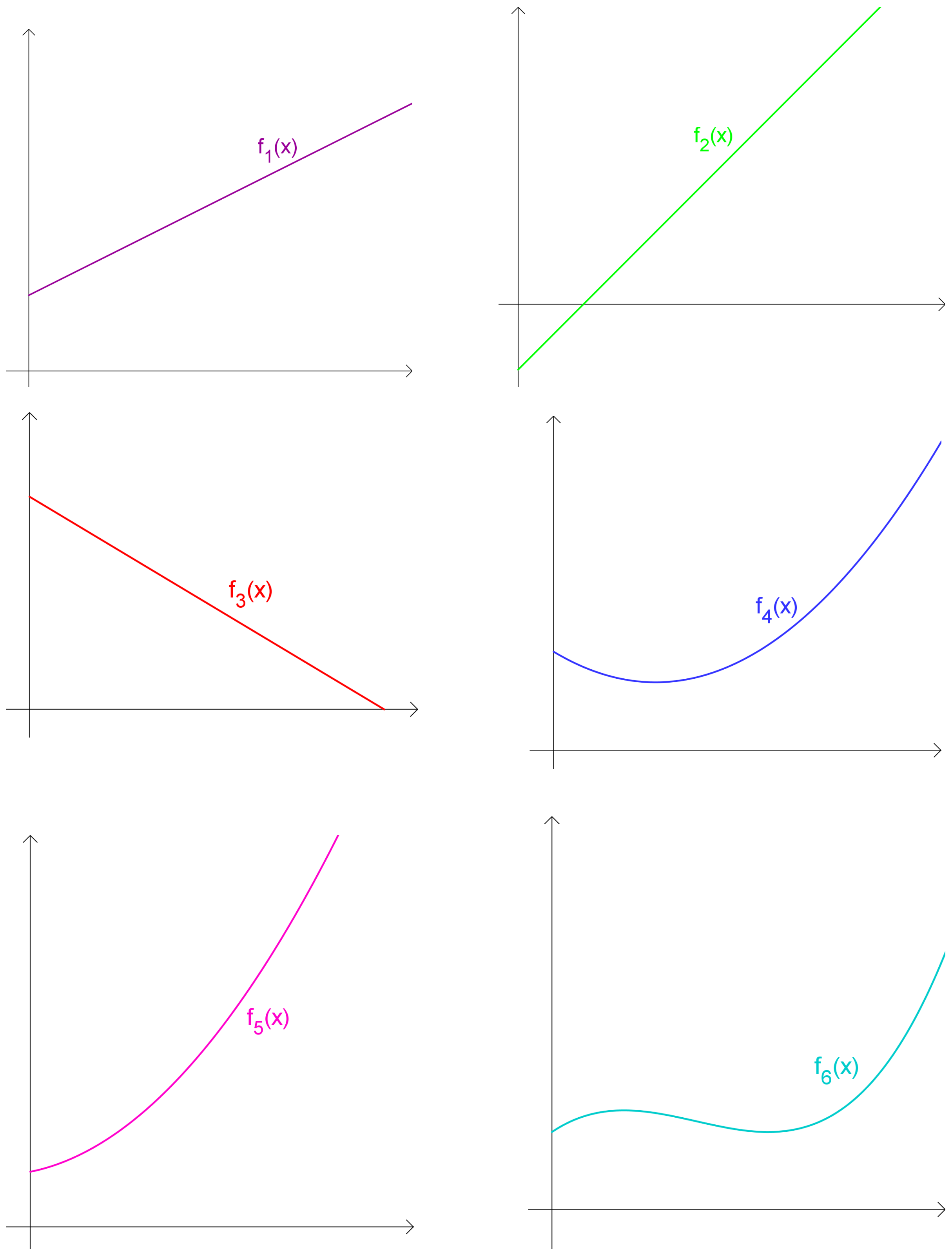
b) Besitzt eine Kostenfunktion Nullstellen?

c) Geben Sie eine geeignete Definitionsmenge für Kostenfunktionen an.

d) Wie berechnet man die **Kostenkehre**?

e) Im welchem Bereich sind die Kosten **degressiv** bzw. **progressiv**?

4. Welche der folgenden 6 Funktionen eignen sich als Kostenfunktion? Begründen Sie Ihre Wahl.



<u>Antwort:</u>

5. Übungsbeispiele:

5.1 Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}9x^2 + 9x + 150$.

a) Bilden Sie die **Grenzkostenfunktion**, d.h. die 1. Ableitung der Kostenfunktion.

b) Was gibt die Grenzkostenfunktion an?

5.2 Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}05x^3 – 3x^2 + 80x + 120$.

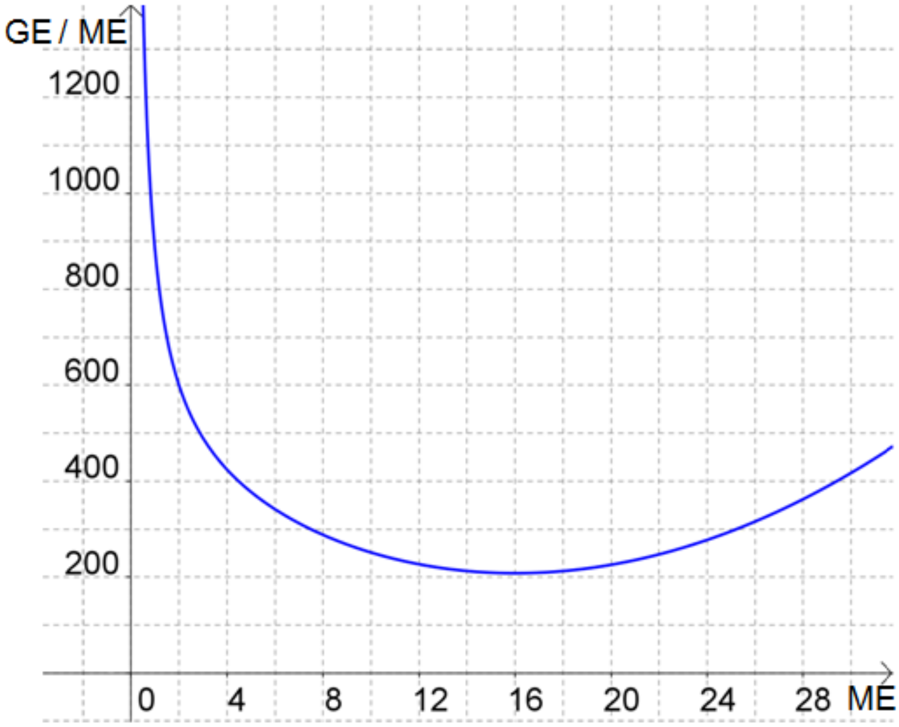
a) Bestimmen Sie die Kostenkehre.

b) Ermitteln Sie den degressiven und progressiven Kostenbereich.

6. Erstellen Sie ein Informationsblatt zum Thema „Kostenfunktion“ für Ihre Mitschüler/innen.

Expertengruppe B: Stückkostenfunktion

Ausgehend von der gegebenen Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 512$ erhält man die Stückkostenfunktion $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = x^2 - 30x + 400 + \frac{512}{x}$.



1. Lesen Sie aus obigem Funktionsgraphen ab:

a) Gibt es eine Problemstelle? Wenn ja, wo liegt diese?

b) Monotonieverhalten:

c) Extrempunkte:

d) Wendepunkt:

2. Nun sehen Sie sich bitte das Informationsvideo an.
http://www.youtube.com/watch?v=WOPQ3bYv4Ak&feature=player_embedded

3. Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Wie berechnet man das **Betriebsoptimum**?

b) Wie ermittelt man die **langfristige Preisuntergrenze**?

c) Erklären Sie das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze in eigenen Worten.

d) Was bedeutet es für den Betrieb, wenn er x_{opt} ME produziert und zu einem Preis in der Höhe des Stückkostenminimums verkauft?

4. Variable Stückkostenfunktion

In der Praxis kann es vorkommen, dass die Fixkosten für einen kurzen Zeitraum vernachlässigt werden müssen. Dann entsteht aus der Gesamtkostenfunktion die sogenannte **variable Kostenfunktion $K_v(x)$**. Bildet man davon die Durchschnittskosten, so spricht man von der **variablen Stückkostenfunktion $\overline{K_v}(x)$**.

a) Wie lautet die variable Kostenfunktion zur Gesamtkostenfunktion am Beginn?

b) Ermittle die variable Stückkostenfunktion.

c) Berechnen Sie den Extrempunkt der variablen Stückkostenfunktion. Die x-Koordinate ist das **Betriebsminimum**; die y-Koordinate ist die **kurzfristige Preisuntergrenze**.

5. Übungsbeispiel:

Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}05x^3 - 3x^2 + 80x + 120$.

a) Bilden Sie

(1) die variable Kostenfunktion:

(2) die Stückkostenfunktion:

(3) die variable Stückkostenfunktion:

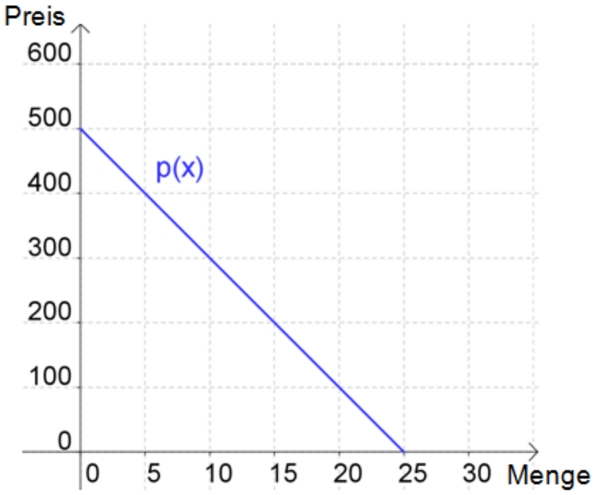
b) Bestimmen Sie das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze.

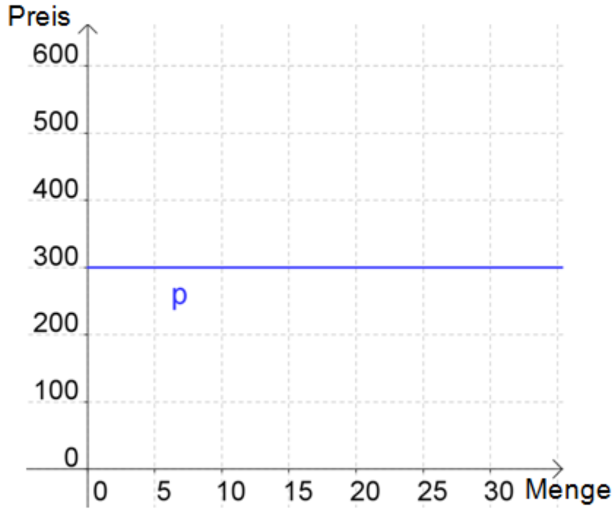
c) Ermitteln Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

6. Erstellen Sie ein Informationsblatt zum Thema „Stückkostenfunktion“ für Ihre Mitschüler/innen.

Expertengruppe C: Preis- und Erlösfunktion, Elastizität

Gegeben sind zwei Funktionsgraphen:





1. Lesen Sie aus obigen Funktionsgraphen ab:

a) Bestimmen Sie jeweils Funktionstypus und Funktionsterm.

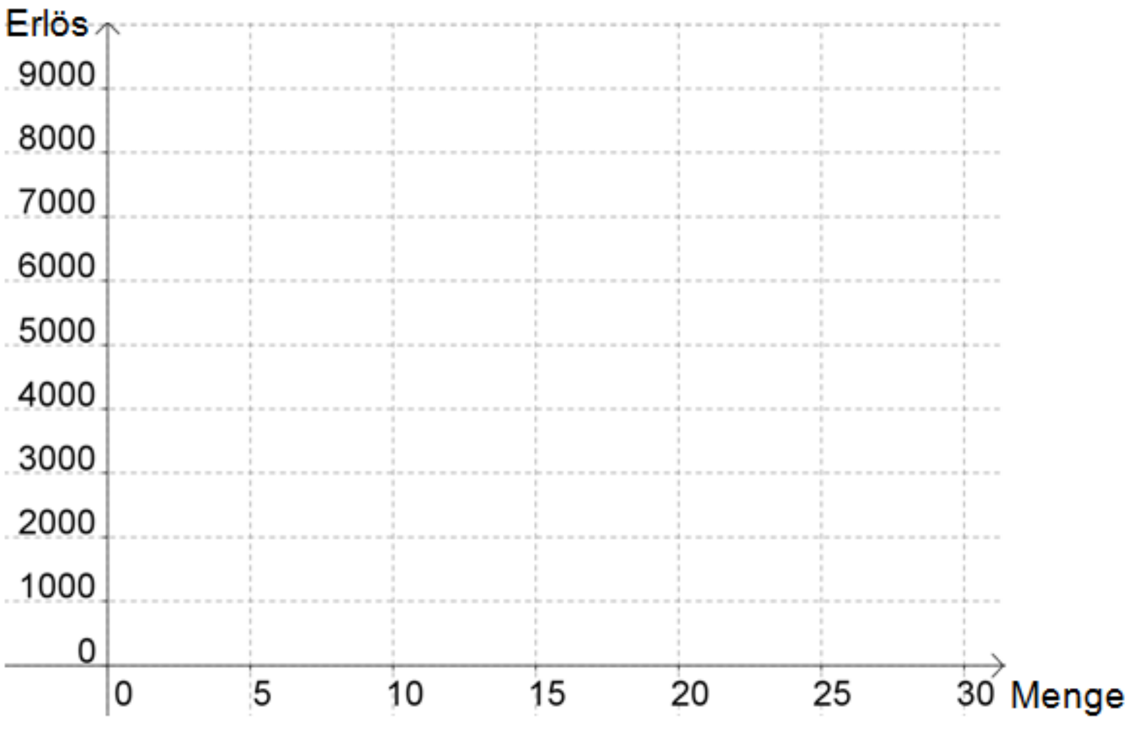
b) Wie hoch ist jeweils der Preis, wenn (1) 10 Stück, (2) 20 Stück produziert werden? Was fällt dabei auf?

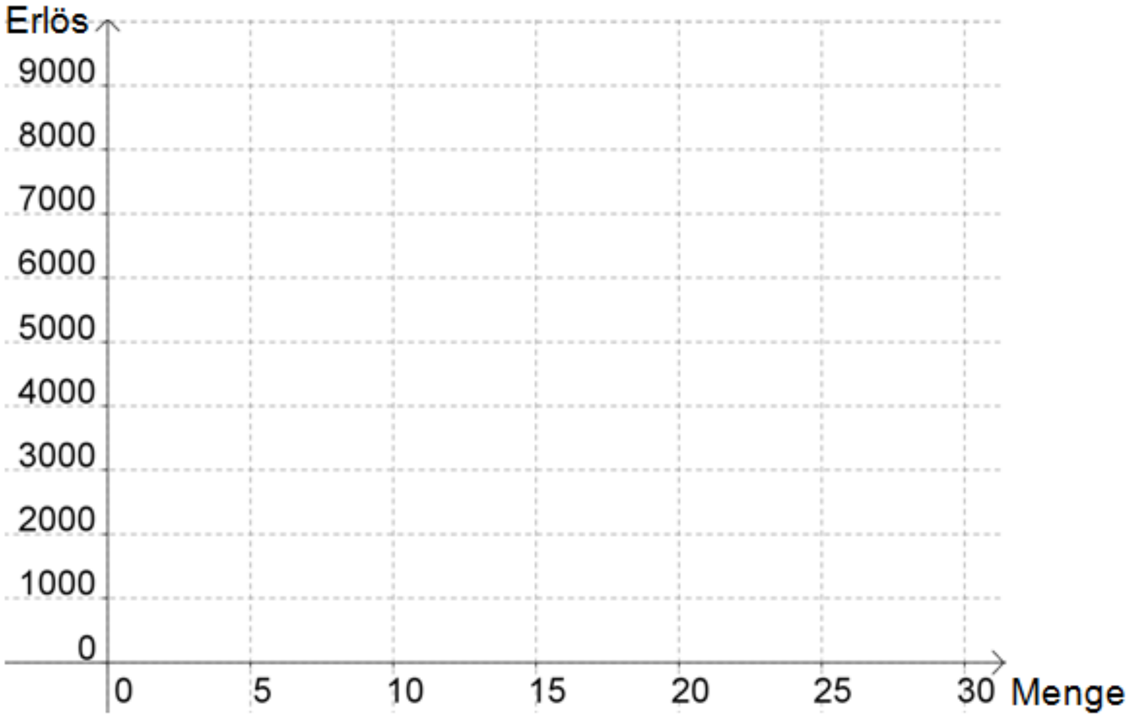
2. Nun sehen Sie sich bitte das Informationsvideo an.
http://www.youtube.com/watch?v=aaGoF0XyYbw&feature=player_embedded

3. Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Bestimmen Sie die **Erlösfunktionen** zu den oben angeführten **Preisfunktionen**.

b) Zeichnen Sie die beiden Erlösfunktionen.





c) Bestimmen Sie jeweils den Erlös für den Absatz von 8 ME und 20 ME.

d) Lesen Sie aus den beiden Graphen das jeweilige **Erlösmaximum** ab.

4. Erstellen Sie ein Informationsblatt zum Thema „Preis- und Erlösfunktion" für Ihre Mitschüler/innen.

5. Elastizität

Die Elastizität ε ist das **Verhältnis von Mengenänderung zu Preisänderung**.

Beispiel A:

Eine Preiserhöhung um 5 % bewirkt eine Verminderung des Absatzes um 10 %.

$$\varepsilon = \frac{-0{,}1}{0{,}05} = -2,$$

d.h. erhöht sich der Preis um 1 %, so sinkt die Nachfrage um 2 %.

Beispiel B:

Eine Preiserhöhung um 3 % bewirkt eine Verminderung des Absatzes um 1,5 %.

$$\varepsilon = \frac{-0{,}015}{0{,}03} = -0{,}5,$$

d.h. erhöht sich der Preis um 1 %, so sinkt die Nachfrage um 0,5 %.

Information:

- Ändert sich die Nachfrage stärker als der Preis (z.B. Preis + 1 %, Nachfrage – 2 %), so ist die Nachfrage **elastisch** ($\boldsymbol{\varepsilon} < -1$).

  Auf welche Güter trifft das zu?

- Ändert sich die Nachfrage weniger stark als der Preis (z.B. Preis + 1 %, Nachfrage – 0,5 %), so ist die Nachfrage **unelastisch** ($\boldsymbol{\varepsilon} > -1$).

  Auf welche Güter trifft das zu?

- Für $\boldsymbol{\varepsilon = -1}$ heißt die Elastizität **fließend**.

  Was bedeutet das?

- Ändert sich die Nachfrage nie, so nennt man die Elastizität **starr**.

  Wie groß ist dann ε?

  Auf welche Güter trifft das zu?

Beispiel C:

Preis p in GE/ME	Absatz x in ME
5	10 000
7	8 000

1. Um wie viel Prozent wird der Preis erhöht?

2. Um wie viel Prozent wird die Nachfrage gesenkt?

3. Berechnen Sie daraus die Elastizität und interpretieren Sie sie.

Beispiel D:

Preis p in GE/ME	Absatz x in ME
10	5 000
12	3 000

1. Um wie viel Prozent wird der Preis erhöht?

2. Um wie viel Prozent wird die Nachfrage gesenkt?

3. Berechnen Sie daraus die Elastizität und interpretieren Sie sie.

Die Nachfragefunktion zu obigen Beispielen lautet: p(x) = – 0,001x + 15.
Einfacher lässt sich die Elastizität mit folgender Formel berechnen:

$$\boldsymbol{\varepsilon(x) = \frac{p(x)}{x} \cdot \frac{1}{p'(x)}}$$

Beispiel E:

1. Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion zu p(x) = – 0,001x + 15 und berechnen Sie damit die Elastizität zu einer Absatzmenge von 10 000 ME und 5 000 ME. (*Hinweis:* Die Ergebnisse müssen mit jenen der Beispiele C und D identisch sein.)

2. Berechnen Sie die Absatzmenge, für die $\varepsilon = -1$ ist.

Schlussfolgerungen:

- Ist die Nachfrage unelastisch ($\varepsilon > -1$), macht es Sinn, den Preis zu erhöhen.
- Ist die Nachfrage elastisch ($\varepsilon < -1$), macht es Sinn, den Preis zu senken.
  Zusatzfrage: Versuchen Sie dies zu begründen.

Mischgruppe ABC

Ihre Aufgabe besteht darin, die Themen „Kostenfunktion“, „Stückkostenfunktion“ sowie „Preis- und Erlösfunktion“ mit den erstellten Informationsblättern durchzugehen und sich gegenseitig zu erklären.

Die ausgeteilten Blätter zur Elastizität sind unter Anleitung der Experten aus der Gruppe C gemeinsam auszufüllen.

Gewinnfunktion

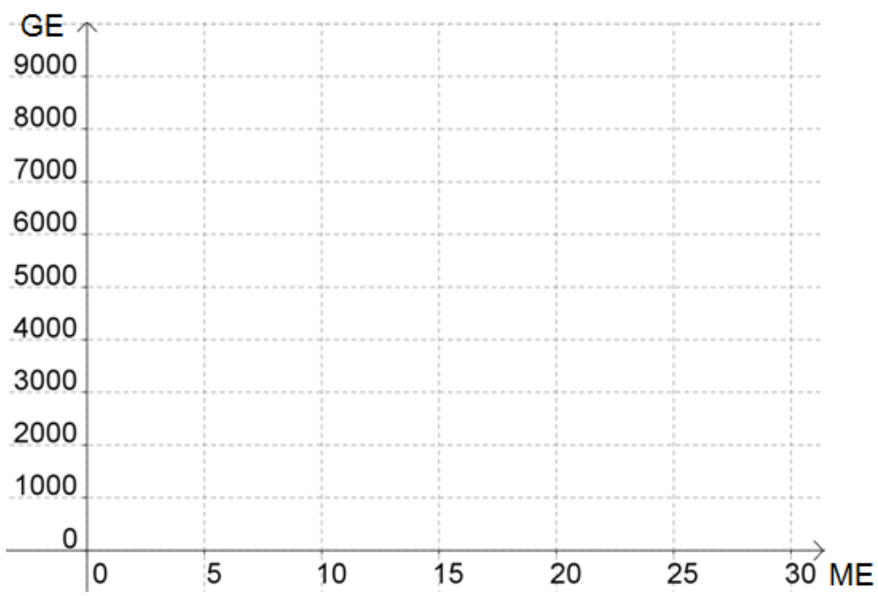
Zur Erinnerung: **Gewinn = Erlös – Kosten**

Ermitteln Sie nun aus den gegebenen Funktionen $K(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 512$ von Gruppe A und aus den beiden Erlösfunktionen von Gruppe C

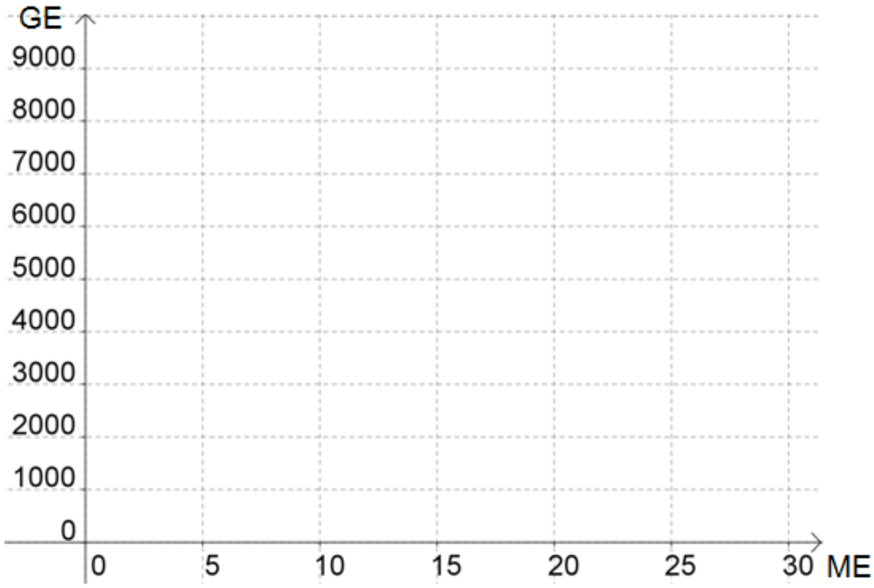
- **die Gewinnfunktion für den Monopolisten:**

- **die Gewinnfunktion bei vollständiger Konkurrenz:**

Bestimmen Sie für den Monopolisten die **Gewinnzone** graphisch (E(x) = K(x)) und rechnerisch (G(x) = 0) sowie das **Gewinnmaximum**.



Bestimmen Sie bei vollständiger Konkurrenz die Gewinnzone graphisch (E(x) = K(x)) und rechnerisch (G(x) = 0) sowie das Gewinnmaximum.



Cournot'scher Punkt

Für den Monopolisten ist der sogenannte Cournot'sche Punkt von Interesse. Das ist ein Punkt der Nachfragefunktion: seine x-Koordinate ist die **gewinnmaximale Menge** und seine y-Koordinate ist der dazugehörige **Preis**.

Berechnen Sie den Cournot'schen Punkt.

Nun sehen Sie sich bitte das Video an, in dem ein Beispiel zu einem Monopolbetrieb komplett durchgerechnet wird. Notieren Sie sich die Angaben und die wichtigsten Ergebnisse und rechnen Sie das Beispiel selbständig durch.
http://www.youtube.com/watch?v=InBC4XO5Ex8&feature=player_embedded

Angaben zum Beispielvideo

$K(x) = 0{,}1\,x^3 - 2\,x^2 + 15\,x + 20$

$P(x) = -1{,}5\,x + 25$

Arbeiten Sie zum Schluss die beiden Übungen

Kostentheorie_cross.htm und

Kostentheorie_match.htm

Solange durch, bis sie das Vokabular der Kosten- und Preistheorie einwandfrei beherrschen.

Lösungen A

1.

a. ca. bei y = 500, genau: K(0) = 512
b. streng monoton steigend auf [0,∞]
c. keine Extremwerte, da stets streng monoton steigend
d. Wendepunkt bei ca. x = 10. Übergang von Rechts- zu Linkskurve
e. Rechtskrümmung auf [0,10], Linkskrümmung auf [10,∞]

3.

a. streng monoton steigend, K(0) ≥ 0, also Fixkosten positiv, Übergang von Rechtskurve in Linkskurve
b. normalerweise nicht, nur dann, wenn Fixkosten 0 sind.
c. Kostenfunktion ist definiert auf dem Intervall [0,b], wobei b gewissermaßen die Kapazitätsgrenze ist und je nach Situation sinnvoll festgelegt werden muss.
d. Kostenkehre ist der Wendepunkt der Kostenfunktion. Zur Berechnung wird die zweite Ableitung 0 gesetzt. An der Kostenkehre findet der Übergang von Rechts- zu Linkskrümmung statt, die Krümmung an der Kostenkehre ist 0.
e. Degressive Kostenentwicklung bis zur Kostenkehre, ab der Kostenkehre progressive Kostenentwicklung.

4.

Links oben:	als Kostenfunktion geeignet
Rechts oben:	nicht geeignet, da Fixkosten negativ
Mitte links:	nicht geeignet, da fallend
Mitte rechts:	nicht geeignet, da zuerst fallend, dann steigend
Links unten:	als Kostenfunktion geeignet
Rechts unten:	nicht geeignet, da steigend, dann fallend, dann steigend

5.

5.1. a) K’(x) = 1,8x + 9

b) Steigung der Tangente, Momentane Änderungsrate der Kostenfunktion

5.2. a) Kostenkehre bei x = 20. Kostenkehre: (20 / 920)

b) Degressiv: [0,20], progressiv: [20,∞]

Lösungen B

1.

a. Problemstelle stelle bei x = 0. Hier ist eine Polstelle.
b. Streng monoton fallend bis x = 16, danach streng monoton steigend.
c. Ein Tiefpunkt bei ca. (16 / 200), genau bei (16 / 208)
d. Kein Wendepunkt, da stets linksgekrümmt.

3.

a. Betriebsoptimum ist das Minimum der Stückkostenfunktion, als 1. Ableitung der Stückkostenfunktion bilden und 0 setzen. Lösung hier: x = 16
b. Die langfristige Preisuntergrenze ist der Stückkostenpreis am Betriebsoptimum, also $\overline{\mathrm{K}}(16) = 208$.
c. Produziert der Betrieb am Betriebsoptimum, so erreicht er damit die geringsten Stückkosten. Auf lange Sicht gesehen, ist dies die Preisuntergrenze.
d. Für den Betrieb bedeutet es, dass er dort am kostengünstigsten produziert.

4.

a. $K_v(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 - 30\,\mathrm{x}^2 + 400\,\mathrm{x}$
b. $\overline{\mathrm{K}}_v(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{K}_v(\mathrm{x})}{\mathrm{x}} = \mathrm{x}^2 - 30\mathrm{x} + 400$
c. Variable Stückkostenfunktion ableiten und 0-Setzen ergibt: x = 15 als Betriebsminimum. Die kurzfristige Preisuntergrenze ist: $\overline{\mathrm{K}}_v(15) = 175$.

5.

a. $K_v(\mathrm{x}) = 0{,}05\,\mathrm{x}^3 - 3\,\mathrm{x}^2 + 80\,\mathrm{x}$
$\overline{K}(x) = \frac{\mathrm{K}(\mathrm{x})}{\mathrm{x}} = 0{,}05\,\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 80 + \frac{120}{x}$
$\overline{\mathrm{K}}_v(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{K}_v(\mathrm{x})}{\mathrm{x}} = 0{,}05\,\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 80$
b. Betriebsoptimum bei x = 31,23; langfristige Preisuntergrenze: 38,92
c. Betriebsminimum bei x = 30; kurzfristige Preisuntergrenze: 35

Lösungen C

1.

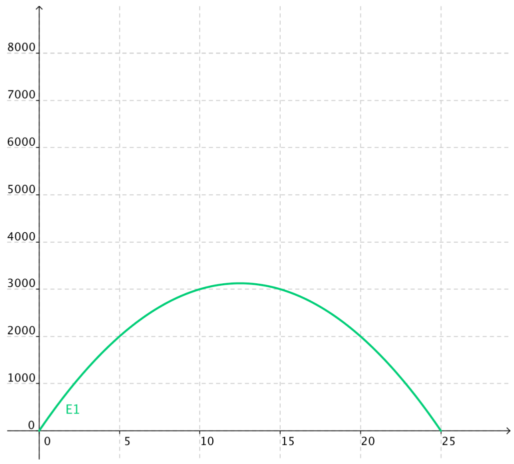
a. Links: Lineare Funktion P1(x) = - 20 x + 500
   Rechts: Lineare Funktion P2(x) = 300

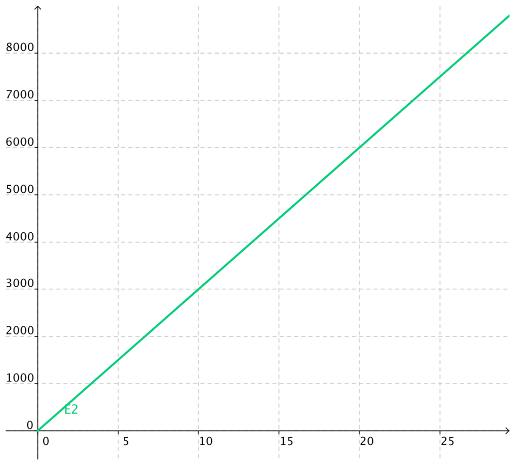
b. P1(10) = 300, P1(20) = 100
   P2(10) = 300, P2(20) = 300
   Bei der Preisfunktion links fällt der Preis bei steigender Menge, bei der Preisfunktion rechts bleibt der Preis konstant.

3.

a. $E1(x) = -20\ x^2 + 500\ x$
   $E2(x) = 300\ x$

b.





c. E1(8) = 2720; E1(20) = 2000
   E2(8) = 2400; E2(20) = 6000

d. Erlösmaximum für E1(x) bei x = 12,5 mit E1(12,5) = 3125
   Erlösmaximum für E2(x) existiert nicht, die Erlösfunktion ist streng monoton steigend.

Lösungen C: Elastizität

Information:

Elastizität elastisch: nicht lebensnotwendige Güter

Elastizität unelastisch: wenig entbehrliche Güter, z. B. Brot, Heizöl usw.

Elastizität fließend: Preisänderung von 1% bewirkt Nachfrageänderung von -1%.

Elastizität starr: $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$: lebenswichtige Güter, z. B. Medikamente

Beispiel C:

1. Preiserhöhung um 40%
2. Nachfragesenkung um 20%
3. Elastische Elastizität: $\boldsymbol{\varepsilon = -0,5.}$ Preiserhöhung führt nicht zu allzu großem Nachfragerückgang.

Beispiel D:

1. Preiserhöhung um 20%
2. Nachfragesenkung um 40%
3. Unelastische Elastizität: $\boldsymbol{\varepsilon = -2.}$ Preiserhöhung führt zu größerem Nachfragerückgang.

Beispiel E:

1. $\boldsymbol{\varepsilon(10000) = -0,5;\ \varepsilon(5000) = -2}$
2. $\boldsymbol{\varepsilon(x) = -1}$ führt zu der Lösung: x = 7500

Lösungen Mischgruppe ABC

Gewinnfunktion für Monopolisten:

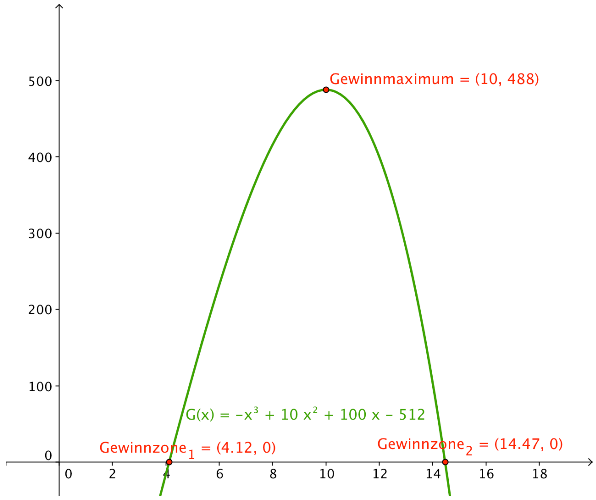
$G(x) = -20\ x^2 + 500\ x – (x^3 – 30x^2 + 400x + 512) = – x^3 + 10x^2 + 100x – 512$

Gewinnzone: [4,12; 14,47]

Gewinnmaximum: x = 10, maximaler Gewinn: 488

Cournotscher Punkt: (10 ; 300)

Der Monopolist weiß, dass er bei einer Produktion von 10 und einem Preis von 300 den maximalen Gewinn erreicht.



Gewinnfunktion bei vollständiger Konkurrenz:

$G(x) = 300x – (\ x^3 – 30x^2 + 400x + 512) = – x^3 + 30x^2 – 100x – 512$

Gewinnzone: [7,48; 25,23]

Gewinnmaximum: x = 18,16, maximaler Gewinn: 1576,66