Station 1: Funktionen beschreiben

Betrachte folgende Funktion und versuche, die unten gestellten Fragen zu beantworten. Bei jeder Antwortmöglichkeit steht ein Buchstabe, den du in die dafür vorgesehenen Kästchen eintragen kannst. Wenn du alle Aufgaben richtig gelöst hast, kommt am Ende ein Lösungswort heraus.

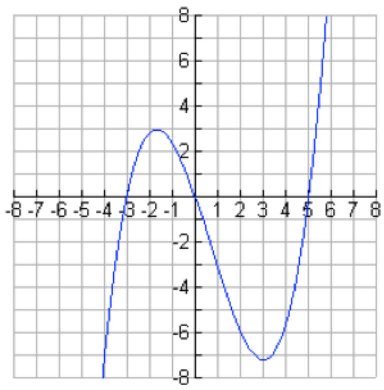


Abbildung 1: $f(x) = \frac{1}{5}\left(x^3 - 2x^2 - 15x\right)$

Frage 1: Wie viele Nullstellen besitzt diese Funktion?	
a) keine	T
b) genau eine	O
c) zwei	R
d) drei	B

Frage 2: Die 1. Ableitung an der Stelle $x = 1$ ist ...	
a) negativ	R
b) positiv	S
c) keines von beiden	D

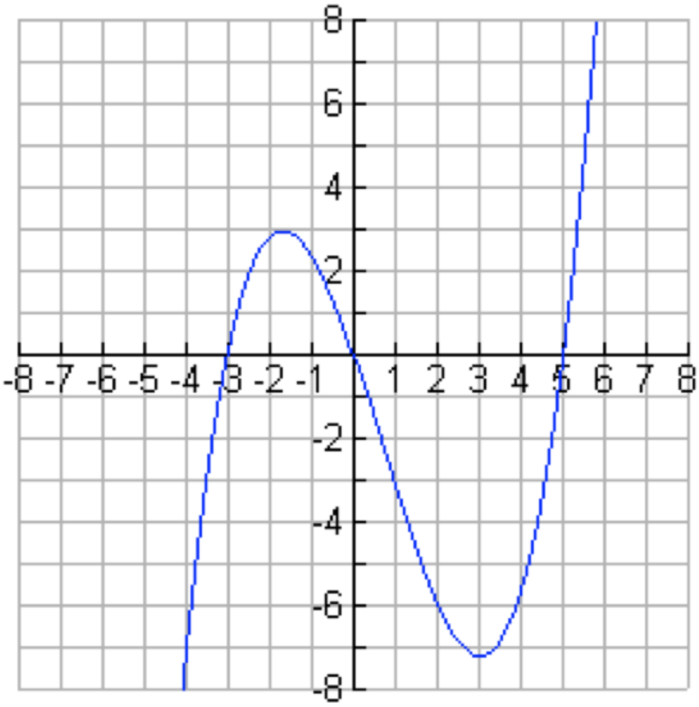
Frage 3: An der Stelle $x = 3$ befindet sich ...	
a) eine Nullstelle	E
b) ein Wendepunkt	U
c) ein Extremwert	A

Frage 4: Wie viele Wendepunkte besitzt diese Funktion?	
a) zwei	G
b) einen	V
c) keinen	M

Frage 5: Die 2. Ableitung an der Stelle $x = 2$ ist ...	
a) negativ	R
b) positiv	O
c) null	I

Lösungswort: | | | | | |

1. Markiere in der angegebenen Grafik besondere Punkte wie Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte.



2. Schreibe zu $f(x) = \frac{1}{5}\left(x^3 - 2x^2 - 15x\right)$ diejenige Gleichung an, mit der die Nullstellen berechnet werden!

   ....

3. Woran erkennt man mathematisch (1. Ableitung), dass die Funktion bergauf geht? In welchem Intervall ist $f(x)$ monoton steigend?

   ....

   ....

4. Welche Bedingungen in Bezug auf die 1. Ableitung erfüllen Gipfel und Tal, d.h. Hoch– und Tiefpunkt? Schreibe die Bedingung als Gleichung an!

   ....

5. An welchen x–Stellen hat $f(x)$ hier einen Extremwert?

   ....

6. In welchen Bereichen (x–Werte) ist die gegebene Funktion $f(x)$

   linksgekrümmt: ....

   rechtsgekrümmt: ....

7. Wie ist das Verhalten der Steigung bei einer rechtsgekrümmten Kurve? Skizziere deine Überlegungen wie bei den unter „Krümmungsverhalten“ angeführten Hinweisen!

8. Durch welche Gleichung (mit $f''(x)$) lässt sich der Wendepunkt vermutlich berechnen?

   ....

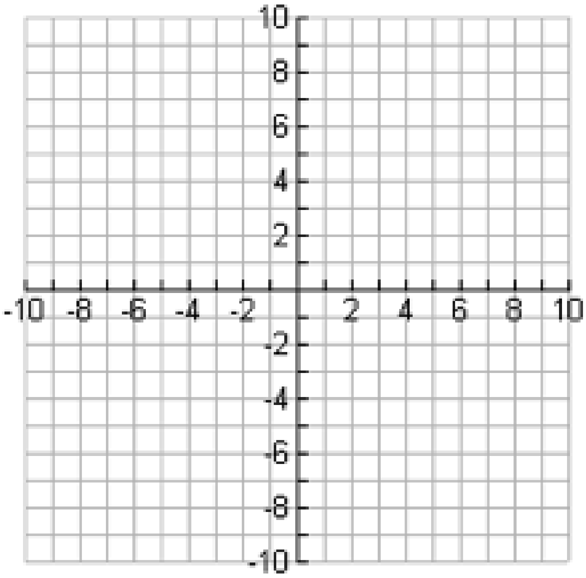
Station 2: Funktionen zeichnen

Pflichtaufgabe:

Die gesuchte Funktion $f(x)$ besitzt:

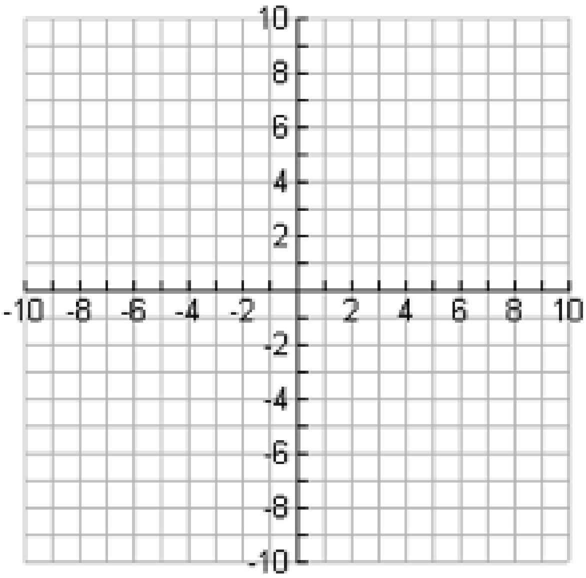
- 2 Nullstellen: $x_1 = -4$ und $x_2 = 5$
- einen Tiefpunkt bei $(5/0)$
- einen Hochpunkt bei $(-1/4)$
- einen Wendepunkt bei $(2/2)$

Zeichne nun mit Hilfe dieser Angaben den dazugehörigen Graphen $f(x)$.



Zusatzaufgabe:

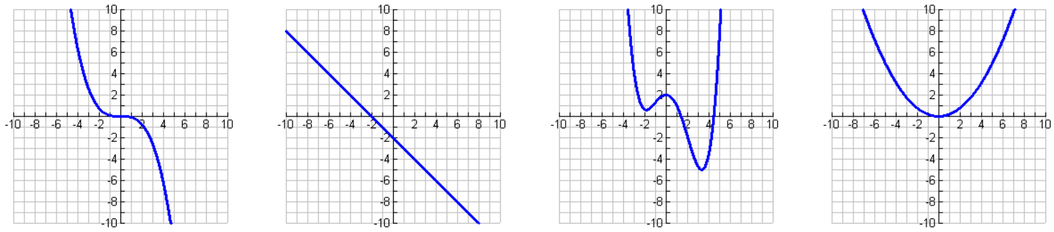
Zeichne die Ableitung der obigen Funktion.



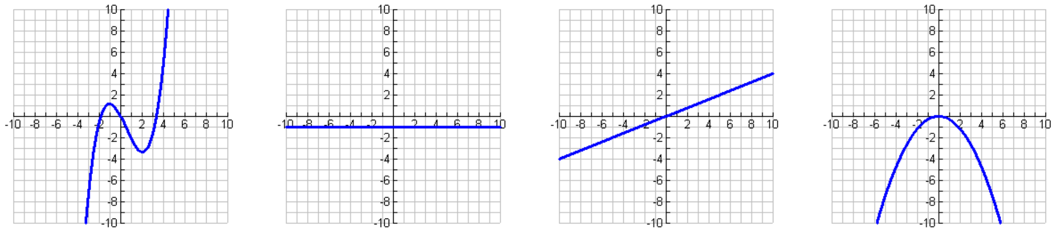
Station 3: Graphisches Ableiten

Verbinde die Graphen der Funktionen mit den dazugehörigen Ableitungen!

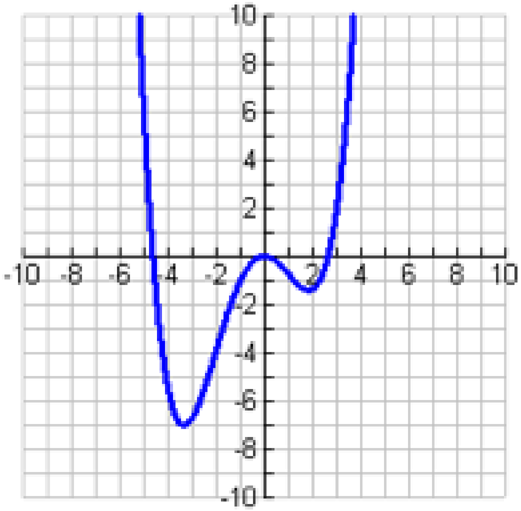
Funktionen:

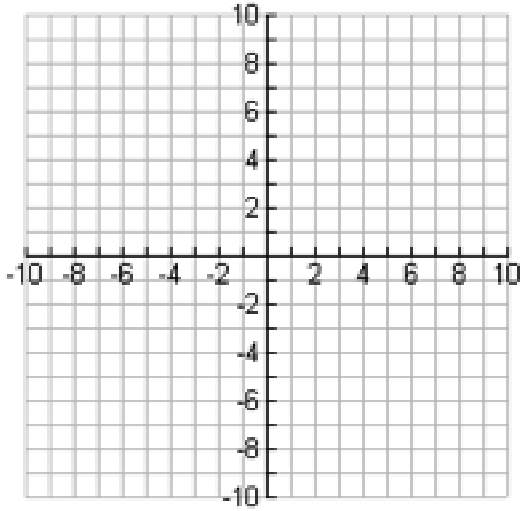


Ableitungen:



Zeichne den Graphen der Ableitung zu der unten abgebildeten Funktion. Verwende dazu das leere Koordinatensystem.





Station 4: Kartenspiel zur Kurvendiskussion

Ein Spiel besteht aus 25 Karten und es können maximal 5 Spieler daran teilnehmen.
Für eine Klasse mit z.B. 26 SchülerInnen sollten also 6 Spiele zur Verfügung gestellt werden.

Spielregeln:

Alle Karten werden in 5 Zeilen und 5 Spalten offen und ungeordnet auf den Tisch gelegt und zwar zeilenweise:

1. die Grafen von f'
2. die Funktionsgleichungen
3. die Aussagen über das Monotonieverhalten
4. die Aussagen zu den Extrempunkten
5. die Aussagen über die Wendestellen jeweils in zufälliger Reihenfolge

Der erste Schüler nimmt eine Karte der ersten Zeile und begründet seinen Mitspielern, welche Karte aus irgendeiner der anderen Zeilen dazu passt. Dann kommt der zweite Mitspieler an die Reihe, nimmt sich aus der ersten Zeile eine Karte und begründet, welche Karte aus irgendeiner der anderen Zeilen dazu passt.
Bei 5 Spielern bleibt zwar (falls sich alle Spieler eine Karte aus der gleichen Reihe nehmen) für den letzten Schüler keine Auswahl, er muss jedoch trotzdem eine Begründung angeben. Bei vier Spielern verbleibt am Ende auf dem Tisch ein Kartensatz, der dann zur Kontrolle verwendet werden kann.
Wenn alle Spieler einmal dran waren, nimmt sich der erste Spieler eine weitere dazupassende Karte und begründet seine Wahl, usw.

Ziel des Spieles ist es nicht, einen Sieger zu ermitteln, sondern sich im Begründen zu üben.

Hinweise zu Station 1: Funktionen beschreiben

Nullstelle:

Als Nullstelle bezeichnet man jene Stelle, an der die Funktion die x–Achse berührt bzw. schneidet!

Monotonieverhalten:

Eine Funktion ist an einer Stelle x streng monoton steigend (bzw. streng monoton fallend), wenn es bergauf bzw. bergab geht!

Extremwert:

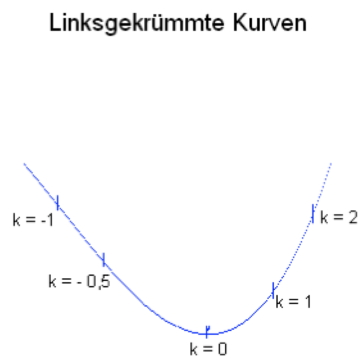
Extremwerte sind hier Gipfel und Talsohlen. An diesen Stellen geht es weder bergauf noch bergab.

Krümmungsverhalten:

Stell dir vor, du fährst mit dem Fahrrad obige Funktion $f(x)$ ab und überlege, in welchem Bereich du das Lenkrad links bzw. rechts einschlägst:

Linkskurve:	mathematisch — linksgekrümmt
Rechtskurve:	mathematisch — rechtsgekrümmt

Linksgekrümmt bedeutet mathematisch, dass die Steigung (= 1. Ableitung) immer größer wird.



Mathematisch heißt das: $f''(x)$ ist positiv!

Wendepunkt:

Wendepunkt ist jener Punkt, in dem die Krümmung von links nach rechts oder von rechts nach links wechselt.

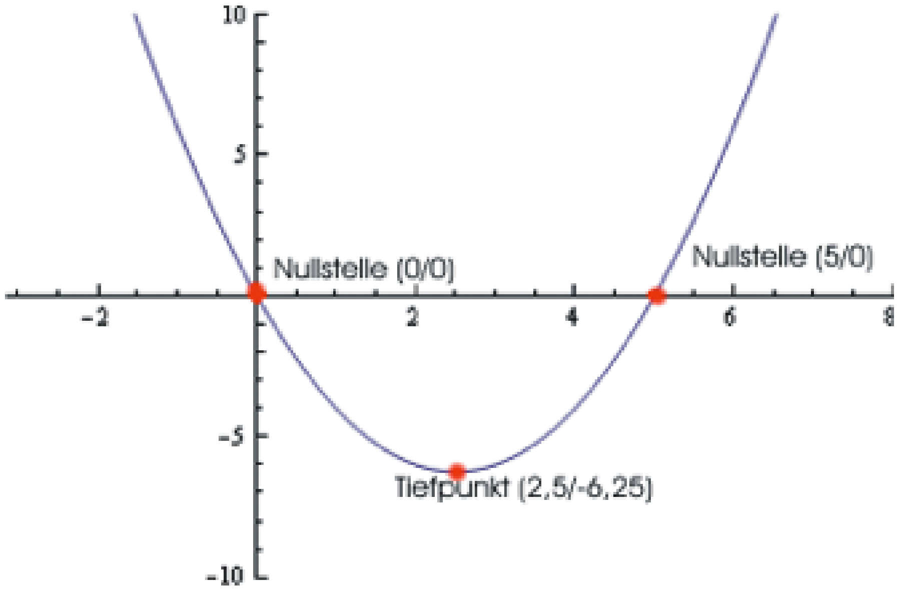
Hinweise zu Station 2: Funktionen zeichnen

In dieser Station ist es deine Aufgabe, mit Hilfe verschiedener Angaben, eine Funktion graphisch darzustellen. Hier ein Beispiel dazu:

Die gegebene Funktion $f(x)$ hat an der Stelle

- $x = 0$ eine Nullstelle
- $(5/0)$ eine Nullstelle
- $(2.5/-6.25)$ einen Tiefpunkt

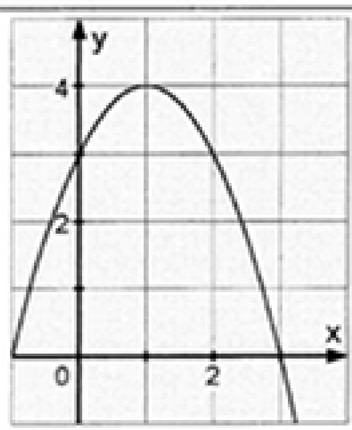
Mit diesen Angaben sollst du nun den Graphen $f(x)$ zeichnen. Dieser kann zum Beispiel so aussehen:



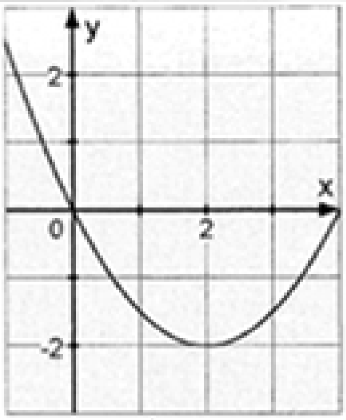
Hilfe zur Zusatzaufgabe:

- Die Extremwerte der Ausgangsfunktion sind im x–Wert die Nullstellen der 1. Ableitung (Die Tangentensteigung ist sowohl in den Hoch– als auch Tiefpunkten null!). Man braucht also nur die x–Werte der Extremwerte in der 1. Ableitung als Nullstellen übertragen.
- Die Wendepunkte der Ausgangsfunktion sind im x–Wert die Extremstellen der 1. Ableitung. Befindet sich der Wendepunkt an einer fallenden Funktionsstelle, so bildet er in der 1. Ableitung einen Tiefpunkt, befindet sich der Wendepunkt an einer steigenden Funktionsstelle, so bildet er in der 1. Ableitung einen Hochpunkt. Der y–Wert des Hoch– bzw. Tiefpunktes braucht hier nicht eigens beachtet werden. Man braucht also nur die x–Werte der Wendepunkte in der 1. Ableitung als Hoch– bzw. Tiefpunkte übertragen.

Material zu Station 4: Kartenspiel

Der Graph von f hat keinen Hochpunkt und keinen Tiefpunkt.	f hat die Wende-stelle x=1.	 f'(x)
$f(x)= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 2$	f hat die Wende-stelle x=1.	Der Graph von f ist im Intervall $]-\infty, -1]$ sowie im Intervall $[3;\infty[$ streng monoton fallend.
Der Graph von f hat den Tiefpunkt $T(-1; -3\frac{2}{3})$ und den Hochpunkt H(3; 7)		

Der Graph von f ist im Intervall $]-\infty;-1]$ streng monoton fallend und im Intervall $[-1;1]$ streng monoton steigend.



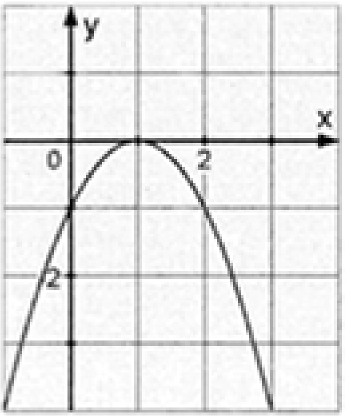
f'(x)

Der Graph von f ist im Intervall $]-\infty;0]$ streng monoton steigend und im Intervall $[0;4]$ streng monoton fallend.

Der Graph von f hat den Hochpunkt H(0;1) und den Tiefpunkt $T(4;-4\frac{1}{3})$

f(x)=
$\frac{1}{6}x^3-x^2+1$

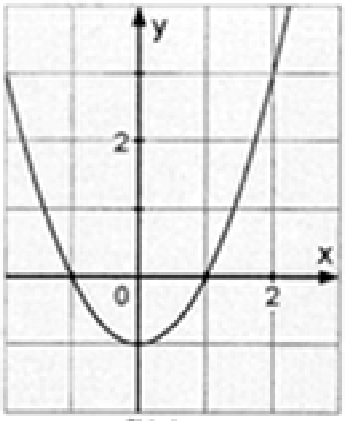
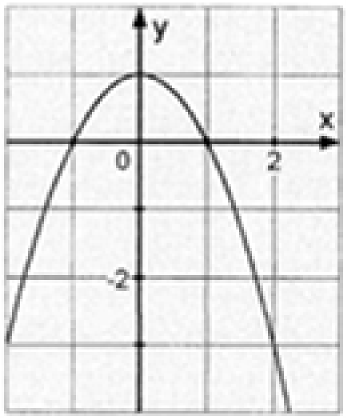
f hat die Wendestelle x=2



f'(x)

f(x)=
$-\frac{1}{3}x^3+x^2-x-1$

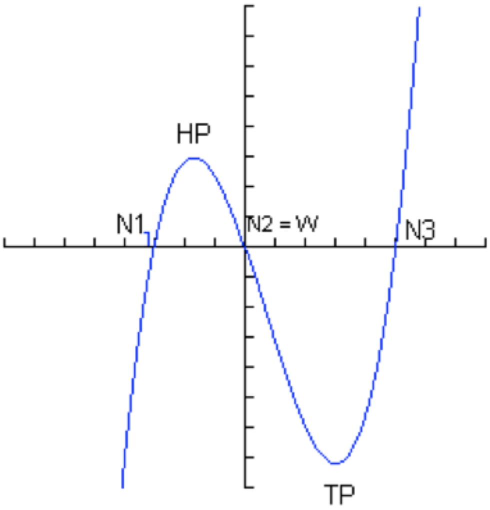
Der Graph von f ist in ganz IR streng monoton fallend.

 f'(x)	$f(x)=$ $\frac{1}{3}x^3 - x + 2$	Der Graph von f ist im Intervall $]-\infty;-1]$ streng monoton steigend und im Intervall $[-1\ ;\ 1]$ streng monoton fallend.
Der Graph von f hat den Hochpunkt $H(-1\ ;\ \frac{8}{3})$ und den Tiefpunkt $T(\ 1;\ \frac{4}{3})$	f hat die Wende-stelle x=0	 f'(x)
Der Graph von f hat den Tiefpunkt $T(-1\ ;\ \frac{1}{3})$ und den Hochpunkt $H(\ 1;\frac{5}{3})$	$f(x)=$ $-\frac{1}{3}x^3 + x + 1$	f hat die Wende-stelle x=0

Station 1: Lösungsblatt

Das Lösungswort ist: BRAVO

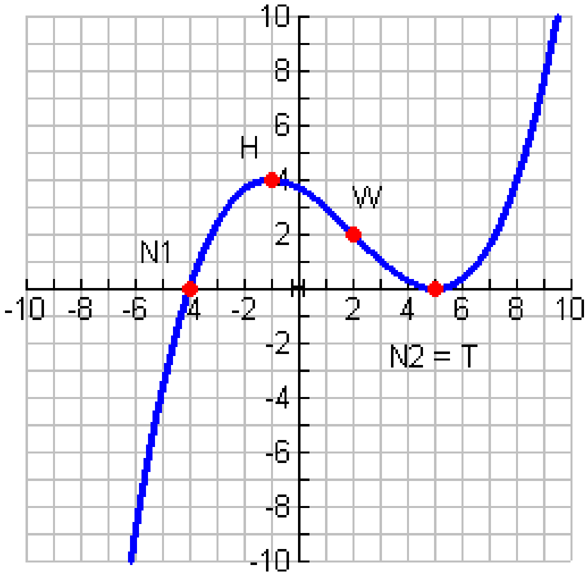
1.



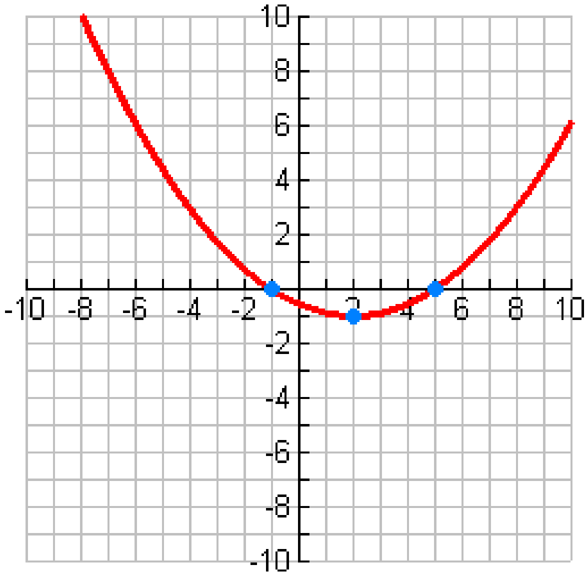
2. $0 = \frac{1}{5}\left(x^3 - 2x^2 - 15x\right)$
3. $f'(x) > 0$; ca. $[-\infty; -1.7]$ und $[3; \infty]$
4. $f'(x) = 0$
5. $x = -1.7$ bzw. $x = 3$
6. linksgekrümmst auf $[0; \infty]$; rechtsgekrümmst auf $[-\infty; 0]$
7. Steigung wird immer kleiner
8. $f''(x) = 0$

Station 2: Lösungsblatt

Pflichtaufgabe:



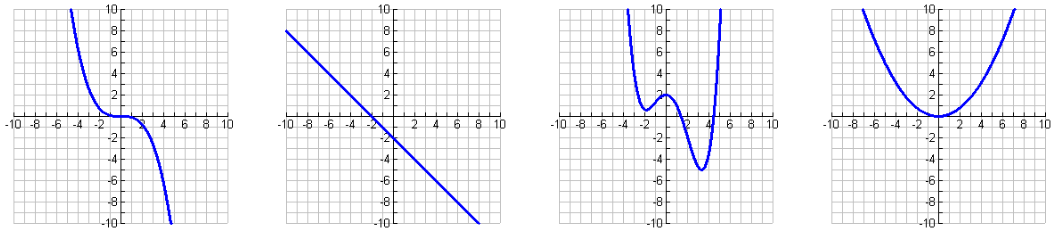
Zusatzaufgabe:



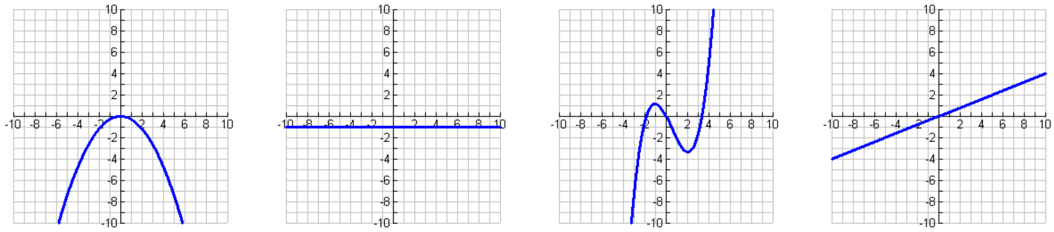
Station 3: Lösungsblatt

Aufgabe 1:

Funktionen:



Zugehörige Ableitungen darunter:



Aufgabe 2: